Física 1

(Problemas)

Prof. Cayetano Di Bartolo Andara

Ultima actualización: Julio de 2004

Física-1 (Problemas)
Prof. Cayetano Di Bartolo
Departamento de Física
Universidad Simón Bolívar

Julio de 2004

Esta guía contiene una serie de problemas (con sus respuestas) adecuados para un primer curso de un trimestre de física universitaria. Muchos de los problemas aquí presentados han aparecido (o son modificaciones de problemas aparecidos) en los exámenes de Física-1 en la Universidad Simón Bolívar. En el estado actual de esta guía (siempre en construcción) los problemas no muestran un panorama de toda la materia. La guía puede encontrarse en mi página web www.fis.usb.ve/∼cdibarto/. Si tiene observaciones que hacer a la presente guía, por favor, no dude en enviármelas a la dirección dibarto@usb.ve

AGRADECIMIENTOS

La guía fue realizada con la inestimable colaboración de mi esposa Jacqueline Geille, quien me ayudó en casi todos los aspectos de su elaboración. Un agradecimiento muy especial a mi hija Fabiola Regina por sus sugerencias luego de leer y resolver la mayoría de los problemas propuestos. También doy las gracias a muchos de los colegas del Departamento de Física de la Universidad Simón Bolívar por su colaboración y aliento.

INSTRUCCIONES

⋆ Cuando lo necesite use como valor numérico para la aceleración de gravedad $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

⋆ En esta guía se usará, para los vectores unitarios cartesianos, la siguiente notación:

$$\boldsymbol{i} = \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{u}}_x \qquad \boldsymbol{j} = \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{u}}_y \qquad \boldsymbol{k} = \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{u}}_z$$

y se supondrá que esta base es de mano derecha ($\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$).

⋆ Cuando en esta guía se hable de una partícula nos referimos tanto a un objeto puntual como a un cuerpo cuyas dimensiones son muy pequeñas comparadas con otros objetos que aparezcan en el problema.

Contenido

Tema 1

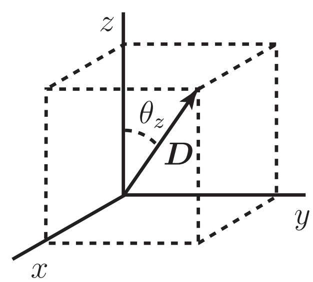
Vectores

---

1. Un vector $\boldsymbol{A}$ tiene componentes cartesianas $A_x = 1$, $A_y = 1$ y $A_z = 0$. Halle los ángulos que forma el vector con los ejes x, y, z (se puede contestar a esta pregunta sin hacer cálculos).

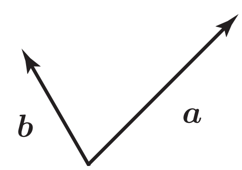
---

2. Halle el ángulo que forman la arista y la diagonal de un cubo que parten del mismo vértice.



---

3. Dados los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de la figura, dibuje el vector $\boldsymbol{c}$ que satisface la ecuación $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$.



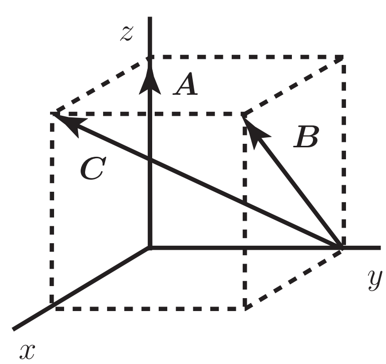
---

4. La figura muestra un cubo de arista l y tres vectores $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$.

a. Halle las componentes cartesianas y los módulos de los vectores $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$.

b. El ángulo entre los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{C}$ es igual al ángulo entre $\boldsymbol{C}$ y el eje z; halle este ángulo.

c. Halle gráfica y analíticamente la diferencia $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$.

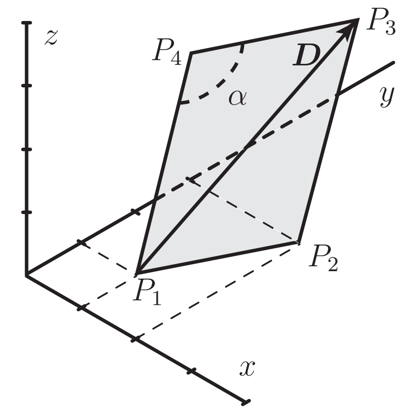


---

5. La figura muestra un paralelogramo con vértices en los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4.

Se conocen las coordenadas cartesianas de los puntos P_1 y P_2, y las componentes del vector $\boldsymbol{D}$:

$$P_1 = (1, 1, 0)\,, \quad P_2 = (2, 3, 0)\,, \quad \boldsymbol{D} = \hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}} + 3\hat{\boldsymbol{z}}\,.$$



a. Se definen los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, el primero parte de P_1 y llega a P_2 y el segundo parte de P_4 y llega a P_1. Encuentre las componentes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

b. Halle las coordenadas de los puntos P_3 y P_4.

c. Halle el ángulo α.

---

6. Se tienen dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tales que $\mid \boldsymbol{a} \mid = \mid \boldsymbol{b} \mid = 2$ y $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2$.

a. Halle $\mid \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \mid$ y el ángulo α entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

b. Se construye un paralelogramo de tal forma que el vector $\boldsymbol{a}$ coincide con uno de sus lados y el vector $\boldsymbol{b}$ con una de sus diagonales. Determine el área A de dicho paralelogramo.

---

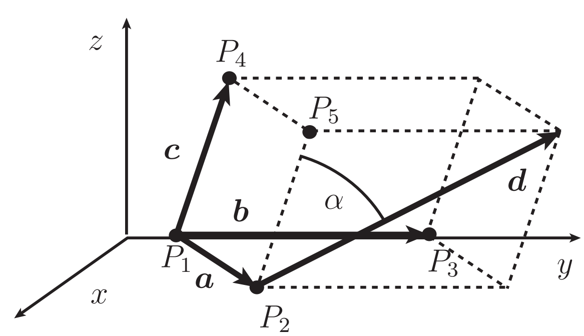
7. La figura muestra un paralelepípedo en un sistema de referencia cartesiano. Las coordenadas de algunos de sus vértices son conocidas: $P_1 = (0, 1, 0)$; $P_2 = (1, 2, 0)$; $P_3 = (0, 4, 0)$; $P_4 = (0, 2, 3)$.

a. Halle las componentes cartesianas de los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

b. Halle las componentes y módulo de $\boldsymbol{d}$.

c. Halle las coordenadas del punto P_5 y el ángulo α.

d. Halle el volumen del paralelepípedo.



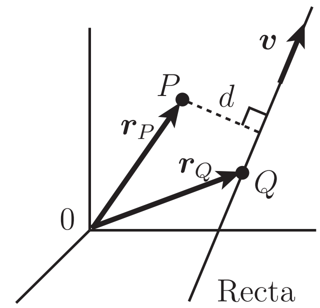
---

8. Sean los vectores $\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Calcule las componentes A_x y A_y sabiendo que el producto vectorial $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ está en el plano xy y $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 5$.

9. Una recta es paralela al vector $\boldsymbol{v}$ y pasa por el punto Q que tiene vector posición $\boldsymbol{r}_Q$. Considere el punto P con vector posición $\boldsymbol{r}_P$. Demuestre que la distancia del punto P a la recta es:

$$d = \frac{1}{|\,\boldsymbol{v}\,|}\;|\,(\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_Q) \times \boldsymbol{v}\,|$$

Como ayuda se muestra un dibujo.



Tema 2

Cinemática

---

1. El vector de posición de una partícula de masa m es

$$\boldsymbol{r}(t) = [R\,\mathrm{sen}(wt) - A]\boldsymbol{i} + [B - R\cos(wt)]\boldsymbol{j}$$

donde A, B, w y R son constantes positivas y t es el tiempo.

a. Halle los vectores velocidad y aceleración de la partícula. Encuentre también la rapidez de la misma.

b. Encuentre y describa la trayectoria de la partícula.

c. Haga un dibujo de la trayectoria e indique sobre la misma la posición de la partícula y la dirección de su velocidad para el instante $t = 0$. Suponga que $R < A$ y $R < B$.

---

2. Desde un cierto sistema de referencia cartesiano se observa que la velocidad de una partícula en función del tiempo es $\boldsymbol{v}(t) = 3t^2\hat{\boldsymbol{u}}_x - 4t\hat{\boldsymbol{u}}_y$, siendo su posición al instante $t = 1$ $\boldsymbol{r}(1) = \hat{\boldsymbol{u}}_x + \hat{\boldsymbol{u}}_y + 4\hat{\boldsymbol{u}}_z$. Todas las cantidades están dadas en unidades MKS.

a. Halle los vectores posición y aceleración de la partícula.

b. Encuentre para el instante $t = 3$ la posición, velocidad, aceleración y rapidez de la partícula.

c. Para el intervalo $t \in [0, 3]$ encuentre los vectores: desplazamiento, velocidad media y aceleración media.

d. ¿Para qué instantes se cumple que los vectores posición y aceleración son perpendiculares entre sí?

---

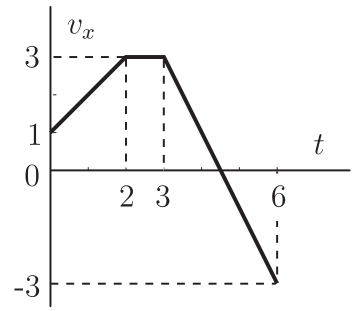
3. La trayectoria de cierta partícula está dada por la ecuación $y = -3x^3 + 4x^2 + x + 1$.

a. Halle para qué valores de x el vector velocidad de la partícula es paralelo al eje x.

b. Halle para qué valores de x son iguales las componentes x y y del vector velocidad.

---

4. La figura muestra la componente x de la velocidad, $v_x(t)$, para una partícula que se mueve sobre el eje x. Suponga que en $t = 0$ la partícula se encuentra en $x = 2$. Todas las unidades están dadas en el sistema MKS.



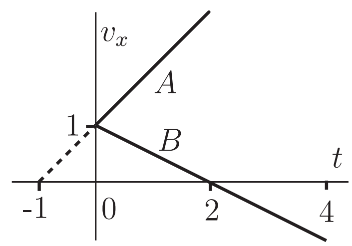
a. Halle la función $v_x(t)$ en el intervalo $t \in [0, 6]$.

b. Encuentre la componente x de la aceleración, $a_x(t)$, y la coordenada $x(t)$ en el intervalo $t \in [0, 6]$.

c. Grafique las funciones $a_x(t)$ y $x(t)$.

---

5. Dos partículas se mueven sobre el eje x con aceleración constante. En el instante $t = 0$ la partícula A se encuentra en $x = -3$ y la partícula B en $x = 9$. La gráfica muestra las velocidades de las partículas en función del tiempo. Todas las unidades están en el sistema MKS.



a. Halle las funciones $a_x(t)$, $v_x(t)$ y $x(t)$ para ambas partículas, tome $t \geq 0$.

b. Encuentre en qué momento ($t = t_{\text{ch}}$) y lugar ($x = x_{\text{ch}}$) las partículas chocan.

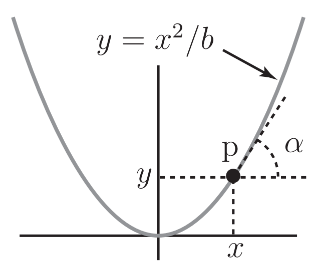
c. En un gráfico dibuje la posición de ambas partículas en función del tiempo, desde $t = 0$ hasta $t = t_{\text{ch}}$.

d. Describa cualitativamente el movimiento de cada partícula.

e. Halle la distancia recorrida por la partícula B y su desplazamiento desde el inicio hasta el momento del encuentro.

---

6. La figura muestra una cuenta p que desliza por un alambre plano en forma de parábola. La ecuación de la parábola es $y = x^2/b$, donde b es una constante positiva con dimensiones de longitud. Llamaremos α al ángulo entre la tangente a la curva y el eje x, en el punto donde se encuentra la cuenta.

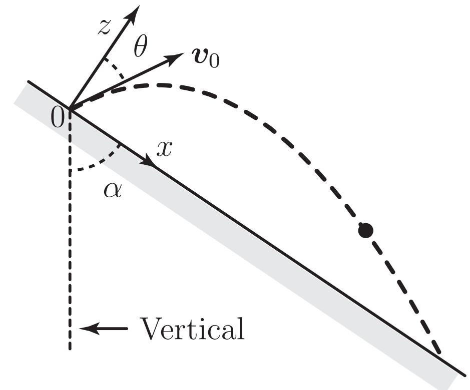


a. Halle $\text{tg}(\alpha)$ en función de la coordenada x de p.

b. Suponga que la cuenta tiene rapidez v y se mueve hacia la derecha. Halle las componentes x y y de la velocidad de la cuenta en función de v y de la coordenada x de p. Ayuda: recuerde que el vector velocidad es tangente a la trayectoria.

---

7. La figura muestra una colina inclinada un ángulo α respecto a la vertical y la trayectoria de un proyectil. El proyectil se lanza desde el origen 0 con una velocidad inicial $\boldsymbol{v}_0$ de módulo v_0 y que forma un ángulo θ con el eje z (perpendicular al plano). El eje x se toma tangente al plano apuntando hacia abajo.



a. Tome el sistema de referencia indicado en la figura y halle las componentes de los vectores aceleración, velocidad y posición del proyectil en función del tiempo.

b. Halle la máxima separación entre el proyectil y la colina.

c. Halle la distancia entre el origen y el punto de caída del proyectil sobre la colina. Demuestre que esa distancia es máxima si $\theta = \alpha/2$.

---

8. Al instante $t = 0$ una piedra (la # 1) se deja caer desde la azotea de un edificio de altura h. Al mismo tiempo y desde la calle se lanza hacia arriba una segunda piedra. Las piedras chocan a una altura $h/4$ respecto a la calle.

a. Determine el instante en el cual chocan las partículas y la rapidez inicial de la partícula #2.

b. Encuentre la velocidad de las partículas en el instante del choque (observe sus direcciones).

c. Muestre en un gráfico las posiciones de las partículas en función del tiempo. Represente en un dibujo las trayectorias de las partículas.

---

9. Un ascensor parte del reposo y desciende con aceleración constante de 1 m/s^2 respecto a Tierra. Dos segundos después de iniciarse el descenso se cae la lámpara del techo del ascensor. La distancia del techo al piso del ascensor es de 2 m. Definimos el referencial del ascensor como aquél con origen en su techo y dirección y positiva apuntando hacia abajo.

a. Halle los vectores aceleración, velocidad y posición de la lámpara respecto al ascensor.

b. Determine el tiempo que tarda la lámpara en caer.

c. Encuentre la distancia recorrida por el ascensor mientras cae la lámpara.

---

10. Los instrumentos de un aeroplano en vuelo horizontal indican que se dirige hacia el Este con una rapidez de 300 km/h respecto al aire. En Tierra se observa que el aeroplano se encuentra en medio de una corriente de aire que sopla hacia el Norte con rapidez de 60 km/h. Halle la velocidad y rapidez del avión respecto a Tierra.

---

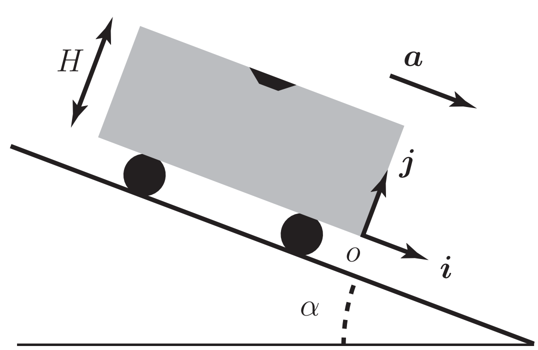
11. Un hombre guía su automóvil bajo lluvia a una velocidad constante respecto a Tierra de módulo v y dirección $\hat{\boldsymbol{x}}$. Mientras conduce el hombre observa que la trayectoria de cada gota es una línea recta que se aparta un ángulo α de la vertical y al detenerse observa que la lluvia cae verticalmente y prácticamente con velocidad constante. Halle el vector velocidad de las gotas de lluvia respecto al auto en movimiento y respecto a Tierra (tome $\hat{\boldsymbol{y}}$ vertical hacia arriba).

---

12. Un vagón de ferrocarril motorizado va cuesta abajo sobre un plano inclinado un ángulo α. La distancia entre el techo y el piso del vagón es H y su aceleración respecto a Tierra es constante y vale $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{i}$, ver figura. Un pasajero del vagón observa que una lámpara, situada en el centro del techo del vagón, se desprende y choca con el piso en el punto o (en el extremo inferior del vagón).

a. Halle la aceleración de la lámpara respecto a Tierra y respecto al pasajero del vagón. Exprese sus resultados en términos de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$.

b. Escriba las componentes cartesianas de la velocidad y posición de la lámpara según el pasajero. Tome el origen en el punto o solidario al vagón y llame L a la longitud del vagón.

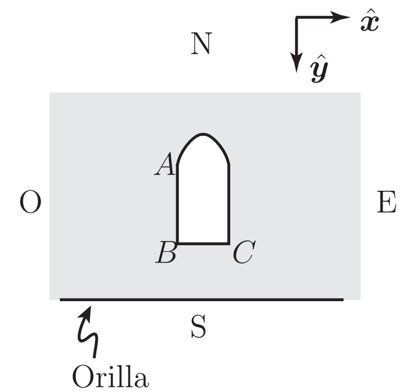


c. Halle el tiempo que tarda la lámpara en caer y la longitud L del vagón.

d. Determine la ecuación de la trayectoria de la lámpara, $y = y(x)$, según el pasajero. ¿Qué clase de curva es la trayectoria de la lámpara vista por el pasajero y vista desde Tierra?

---

13. La corriente de un río fluye de Este a Oeste con rapidez constante $v_c = 2$ m/s respecto a Tierra. Un bote atraviesa el río y de acuerdo a sus instrumentos de a bordo se mueve respecto al río dirigiéndose al Norte con rapidez constante $v_b = 10$ m/s. Respecto al bote un pasajero se desplaza sobre la cubierta en línea recta desde el punto A hasta el punto C con una rapidez constante $v_p = 10$ m/s. Suponga que $\overline{BA} = 4$ m y apunta hacia el Norte y $\overline{BC} = 3$ m y apunta hacia el Este.

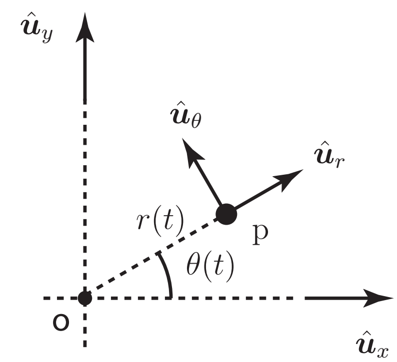


a. Halle el vector unitario $\hat{\boldsymbol{u}}$ que apunta de A a C y las velocidades del bote y del pasajero respecto a Tierra.

b. Halle el tiempo que tarda el pasajero en ir de A hasta C. ¿ Qué distancia recorre el bote en ese tiempo según un observador en Tierra ?

---

14. La figura muestra las coordenadas polares (r, θ) y los vectores polares $(\hat{\boldsymbol{u}}_r, \hat{\boldsymbol{u}}_\theta)$ para un punto p que se mueve en el plano. La distancia de p al origen es r y el ángulo entre su vector posición y el eje x es θ. Nótese que el vector $\hat{\boldsymbol{u}}_\theta$ es perpendicular al vector $\hat{\boldsymbol{u}}_r$ y apunta en la dirección en que θ aumenta.



a. Escriba los vectores unitarios $(\hat{\boldsymbol{u}}_r, \hat{\boldsymbol{u}}_\theta)$ en función de los vectores unitarios $(\hat{\boldsymbol{u}}_x, \hat{\boldsymbol{u}}_y)$ y del ángulo θ.

b. Tome como observador uno fijo respecto a los ejes cartesianos. Derive respecto al tiempo las expresiones obtenidas en la parte **a** y demuestre que se cumple

$$\dot{\hat{\boldsymbol{u}}}_r = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{u}}_\theta \quad \text{y} \quad \dot{\hat{\boldsymbol{u}}}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{u}}_r\,.$$

c. Utilizando los resultados de la pregunta anterior derive el vector posición del punto p, $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{u}}_r$, y halle sus vectores velocidad y aceleración en coordenadas polares, esto es, debe hallarlos en función de las cantidades r, θ, sus derivadas y de los vectores polares.

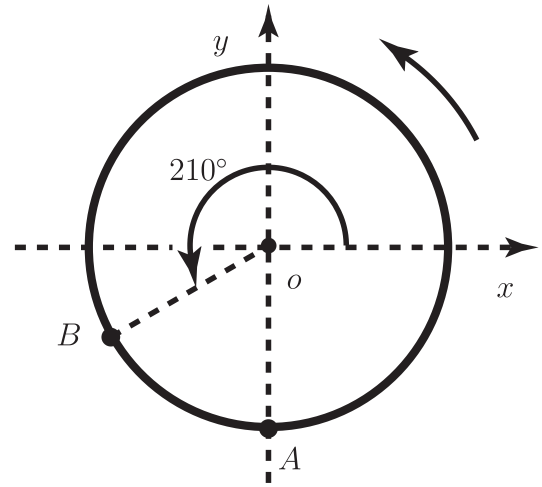
d. Aplique el resultado anterior al caso de un movimiento circular ($r = R$ constante) y determine las componentes polares de la velocidad y la aceleración. Defina la rapidez angular $w = |\dot{\theta}|$ y escriba en términos de R y w la rapidez de p y la componente radial (centrípeta) de su aceleración. Realice un dibujo mostrando el punto p y los vectores polares.

---

15. Una partícula se desplaza sobre un riel circular, con centro en el origen de coordenadas y situado en un plano horizontal, ver figura. El móvil parte del punto A, tiene rapidez constante, su movimiento es en sentido antihorario y al cabo de 6 segundos se halla por primera vez en el punto de coordenadas cartesianas $(-4, 0)$ m.

a. Halle el radio de la circunferencia, la velocidad angular w y el ángulo $\theta(t)$ que existe entre el vector posición de la partícula y el semieje x positivo para cualquier instante t.

b. Exprese en la base cartesiana los vectores velocidad $\boldsymbol{v}$ y aceleración $\boldsymbol{a}$ de la partícula cuando se encuentra en el punto B. Calcule qué longitud de riel le falta recorrer para regresar al punto A.



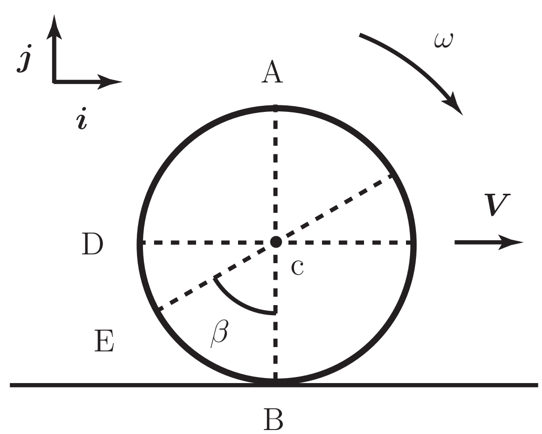
16. El aro de la figura tiene radio R y rueda sobre una superficie horizontal fija a Tierra. El aro gira en sentido horario mientras su centro c se mueve hacia la derecha con rapidez V respecto a la superficie. Considere un observador con origen en c (se traslada con el aro) y que no rota respecto a Tierra. Suponga que todos los puntos del aro tienen rapidez V respecto al observador (se dice entonces que el aro rueda sin deslizar).

En la figura se han marcado 4 puntos para un cierto instante. El punto A es el punto más alto del aro, el B el más bajo, el D el punto del extremo izquierdo y el E con un radio vector que forma un ángulo β con la vertical.

a. Halle la velocidad angular ω del aro.

b. Halle los vectores velocidad de los puntos A, B y D respecto a la superficie.

c. Halle el vector velocidad del punto E respecto a la superficie y diga para qué ángulo β su módulo es igual a V.



---

17. Una partícula describe una circunferencia moviéndose en sentido antihorario con una rapidez $v = 3t^2 + 4t$, donde $t \geq 0$ es el tiempo y todas las unidades se encuentran en el sistema MKS.

a. Halle la longitud de arco recorrida por la partícula en el lapso $[0, t]$.

b. Suponga que al instante $t = 2$ s la aceleración de la partícula tiene módulo 20 $\mathrm{m/s^2}$. Calcule el radio de la circunferencia.

Tema 3

Dinámica

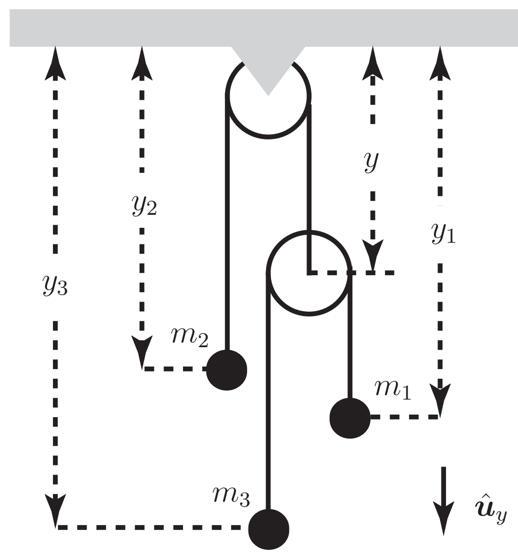
1. El sistema de la figura está compuesto por 3 pequeñas esferas, 2 poleas ideales (sin roce y sin masa) y dos cuerdas ideales (inelásticas y sin masa). La polea superior está fija respecto al techo de una habitación considerada inercial. En la figura se ha indicado la coordenada y del cuerpo en el extremo de cada cuerda (el origen está en el techo).

a. Dibuje el diagrama de fuerzas para cada esfera y polea.

b. Llame l_1 a la longitud de la cuerda atada a m_1 y l_2 a la longitud de la cuerda atada a m_2. Halle l_1 y l_2 en función de cantidades constantes y de las coordenadas y_1, y_2, y_3 y y; tales relaciones entre las coordenadas se denominan ligaduras. Demuestre que

$$l_1 + 2l_2 = 2y_2 + y_3 + y_1 + \text{constantes}\,.$$

Derive dos veces respecto al tiempo la expresión obtenida para hallar la ligadura entre las aceleraciones de las esferas.



c. Escriba las ecuaciones de movimiento que se obtienen de la segunda ley de Newton para cada esfera y polea. Asegúrese que al tomar en cuenta las ligaduras tiene tantas incógnitas como ecuaciones.

d. Para el caso particular $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg y $m_3 = 3$ kg resuelva las ecuaciones y obtenga la aceleración de cada esfera y la tensión en cada cuerda.

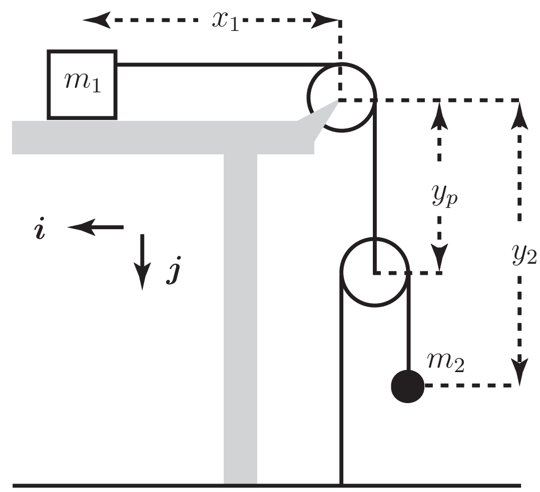
2. Dos masas m_1 y m_2 están acopladas mediante el sistema de cuerdas y poleas ideales mostrado en la figura. La masa m_1 se apoya en una mesa lisa y horizontal y m_2 está suspendida de una cuerda cuyo otro extremo está atado al piso. Se ha tomado el origen en el centro de la polea fija y se han indicado la coordenada horizontal de m_1 y las verticales de m_2 y de la polea móvil.

a. Dibuje el diagrama de fuerzas para cada masa y polea.

b. Halle la longitud de cada cuerda en función de las coordenadas de los cuerpos en sus extremos y de longitudes constantes. Derive dos veces respecto al tiempo las expresiones obtenidas para hallar las ligaduras entre las aceleraciones.

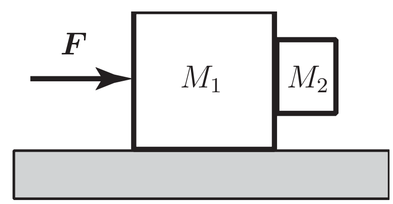
c. Escriba las ecuaciones de movimiento para cada masa y polea.

d. Resuelva las ecuaciones y obtenga la tensión en cada cuerda y el vector aceleración de las masas y de la polea móvil.



---

3. En el sistema de la figura se conocen las masas de los dos bloques y no hay deslizamiento entre ellos, siendo μ_e el coeficiente de roce estático entre los bloques. Suponga que la fuerza $\boldsymbol{F}$ aplicada al sistema es horizontal y que no existe roce sobre la superficie horizontal.



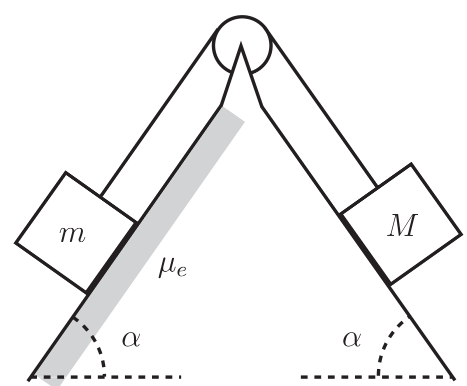
a. Dibuje por separado el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los dos cuerpos involucrados. Identifique claramente las diferentes fuerzas.

b. Escriba las ecuaciones de movimiento para cada una de las dos masas.

c. ¿ Cuál es el rango de valores permitidos para el módulo de $\boldsymbol{F}$ de manera que el cuerpo de masa M_2 no resbale ?

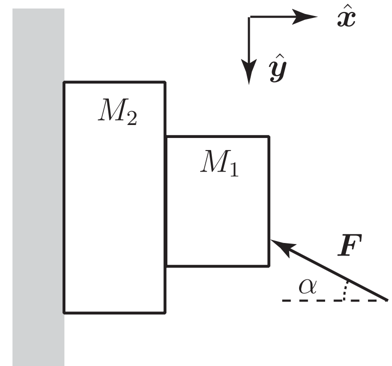
---

4. Una cuña fija a Tierra tiene dos planos inclinados un ángulo α respecto a la horizontal como se muestra en la figura. Sobre los planos inclinados se encuentra un sistema de masas y poleas. La cuerda y la polea son ideales. El coeficiente de roce estático entre el bloque de masa m y el plano inclinado es μ_e, mientras que el plano inclinado sobre el cual descansa M es liso. Suponga conocidos m, α y μ_e. Halle el rango de valores permitidos para la masa M de manera que el sistema no se mueva.



---

5. Un bloque de masa M_2 se apoya en una pared vertical lisa y otro bloque de masa M_1 se apoya sobre el primero. Un agente aplica una fuerza $\boldsymbol{F}$ sobre M_1 como se indica en la figura. Suponga que hay roce entre los dos bloques y éstos no deslizan entre sí.



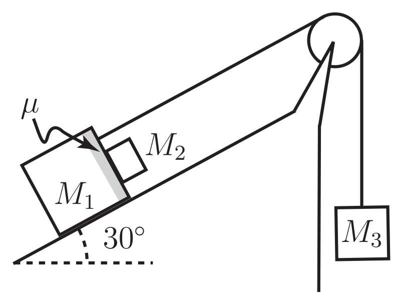
a. Dibuje por separado el diagrama de cuerpo libre de los dos bloques. Identifique claramente las diferentes fuerzas.

b. Escriba las ecuaciones de movimiento para cada bloque.

c. Tome $M_1 = 1$ kg, $M_2 = 2$ kg, $\alpha = 30°$ y $|\ \boldsymbol{F}\ | = 12$ N. Halle los vectores: aceleración de M_1 y fuerza de roce sobre M_1. Determine cuáles son los valores posibles del coeficiente de roce estático.

---

6. En el sistema de la figura la cuerda y la polea son ideales y los bloques tienen masas $M_1 = 4$ kg, $M_2 = 2$ kg y $M_3 = 12$ kg. El bloque M_2 se apoya sobre el bloque M_1; hay roce entre ellos pero no deslizamiento, siendo μ el coeficiente de roce estático. El plano inclinado es liso.



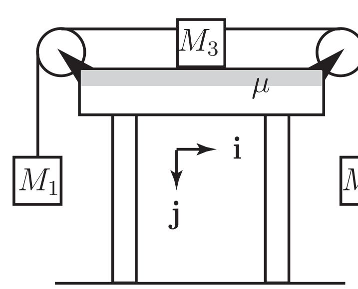
a. Para cada cuerpo dibuje el diagrama de fuerzas y escriba las ecuaciones de movimiento.

b. Halle los módulos de las siguientes cantidades: la aceleración de los bloques, la tensión en la cuerda, la fuerza de roce $\boldsymbol{F}_r$, la normal $\boldsymbol{H}$ entre M_1 y M_2 y la normal $\boldsymbol{N}$ entre M_1 y el plano inclinado.

c. Halle los valores permitidos para el coeficiente de roce μ.

---

7. El sistema de la figura muestra tres bloques unidos a través de cuerdas ideales que pasan por poleas ideales. El bloque #3 se mueve sobre una superficie horizontal rugosa, siendo μ el coeficiente de fricción dinámico entre ellos. Los otros dos bloques cuelgan de las cuerdas y se mueven verticalmente. Llamaremos a a la componente x de la aceleración del bloque #3 de manera que $\boldsymbol{a}_3 = a\,\boldsymbol{i}$.



a. Usando las ecuaciones de Newton para los bloques que cuelgan determine el módulo de las tensiones en las cuerdas en función de a, g y de las masas de los bloques.

b. Utilizando los resultados de la pregunta anterior y las ecuaciones de Newton para el bloque #3 determine a para las siguientes dos situaciones: el bloque #3 moviéndose hacia la derecha (caso 1) y el bloque #3 moviéndose hacia la izquierda (caso 2).

c. Evalúe las respuestas obtenidas en la pregunta anterior cuando $M_1 = M_3 = 2$ kg, $M_2 = 6$ kg y $\mu = 1/2$. Diga para cada uno de los dos casos si el movimiento es acelerado o retardado.

d. Evalúe las respuestas obtenidas en la pregunta **b** cuando $M_1 = M_2 = M_3$. Diga si en alguno de los dos casos el bloque M_3 se puede detener en algún instante y cuál sería su movimiento ulterior si ello ocurriera.

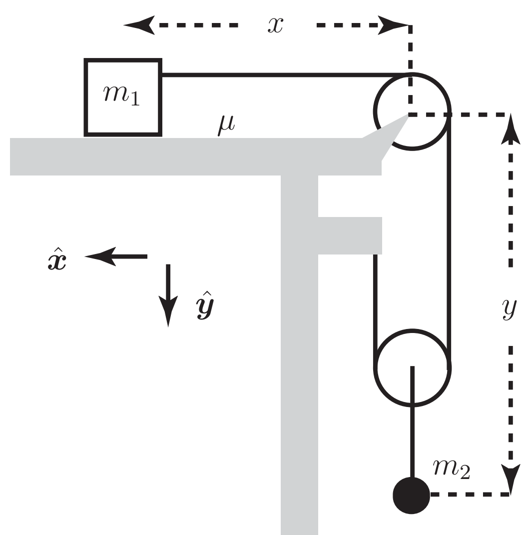
---

8. Un bloque de masa m_1 está moviéndose hacia la derecha sobre una mesa horizontal siendo μ su coeficiente de fricción dinámico. El bloque se acopla a una masa m_2 mediante el sistema de cuerdas y poleas ideales mostrado en la figura. Se ha tomado el origen en el centro de la polea fija y se ha indicado la coordenada x de m_1 y la coordenada y de m_2.

a. Dibuje el diagrama de fuerzas para cada masa y polea.

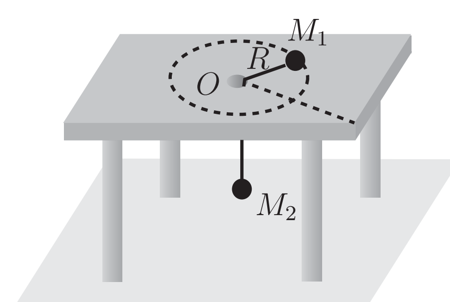
b. Halle la longitud de la cuerda que pasa por las poleas en función de las coordenadas de las masas y de longitudes constantes. Derive dos veces respecto al tiempo la expresión obtenida para demostrar que la ligadura entre las aceleraciones de las dos masas es $0 = \ddot{x} + 2\ddot{y}$.

c. Escriba las ecuaciones de movimiento para cada masa y polea. Resuelva las ecuaciones y obtenga el vector aceleración de cada masa.



---

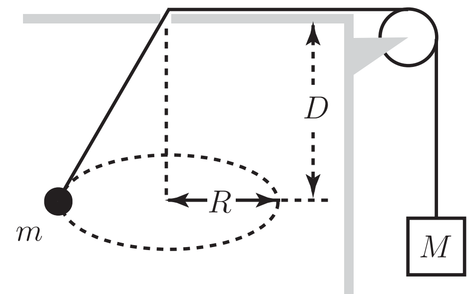
9. Las dos partículas del dibujo con masas M_1 y M_2 están unidas por una cuerda sin masa que pasa a través de un agujero O, de tamaño despreciable, practicado en la mesa. No hay roce en el sistema, la partícula de masa M_1 tiene un movimiento circular de radio R mientras que la otra partícula cuelga en reposo. Halle el tiempo que tarda la partícula M_1 en completar una vuelta.



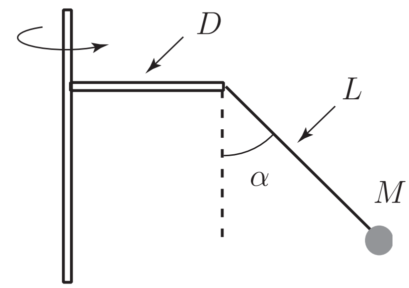
---

10. La figura muestra un bloque de masa M desconocida que permanece en reposo colgando de una cuerda tensa e ideal. La cuerda pasa por una polea ideal, luego por un pequeño agujero practicado en una mesa horizontal y termina atada a una esferita de masa m. La esferita gira describiendo un círculo horizontal de radio R y a una distancia D de la mesa.

Halle la masa M del bloque, la velocidad angular w de la esferita y la fuerza sobre la polea debida al soporte.



11. La figura muestra una esfera de masa M en el extremo de un hilo de longitud L. El hilo está atado a una varilla horizontal de longitud D que se une a un eje vertical. Debido a un mecanismo no mostrado la varilla gira con velocidad angular constante en torno al eje. El hilo mantiene un ángulo constante α con la vertical.



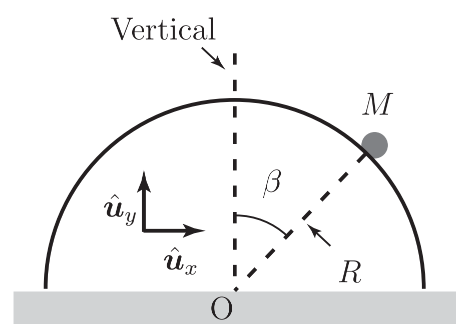
a. Halle el módulo de la aceleración y la velocidad angular de la partícula.

b. Diga cómo sería la posición del hilo respecto a la varilla y al eje si la velocidad angular no fuera constante. Razone su respuesta brevemente.

12. Un objeto de masa M desliza hacia abajo y sin roce sobre una superficie semiesférica fija a Tierra. El radio de la esfera es R y O su centro. Justo para el instante mostrado en la figura el objeto abandona la superficie esférica. Halle para ese instante:

a. la velocidad y aceleración angulares del objeto.

b. las componentes cartesianas de los vectores velocidad y aceleración del objeto respecto a Tierra.



13. Un pequeño bloque de masa M se encuentra apoyado sobre un disco horizontal a una distancia L de su centro. El disco comienza a girar desde el reposo y alrededor de su centro con una aceleración angular constante α. El bloque no desliza sobre el disco siendo μ_e el coeficiente de roce estático.

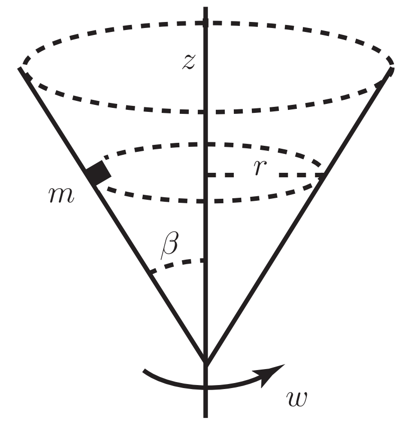
a. Dibuje el diagrama de cuerpo libre del bloque indicando claramente las componentes tangencial y radial de la fuerza de roce. Escriba las ecuaciones de movimiento del bloque (mientras éste no resbale).

b. Calcule: el valor de la fuerza normal, las componentes tangencial y radial de la aceleración del bloque y las componentes tangencial y radial de la fuerza de roce.

c. ¿ En qué instante el bloque comienza a resbalar ?

---

14. La figura muestra un cascarón cónico que gira con velocidad angular constante w. El eje principal del cono, eje z, coincide con la vertical y forma un ángulo $\beta < \pi/2$ con la superficie del cascarón. En el interior del cono a una distancia r del eje z se encuentra una partícula de masa m que, debido a la fricción estática, no se mueve respecto a la superficie del cascarón.



a. Calcule la normal y la fuerza de roce sobre la partícula en función de β, r, w y m. Determine tanto sus módulos como sus componentes radial y vertical.

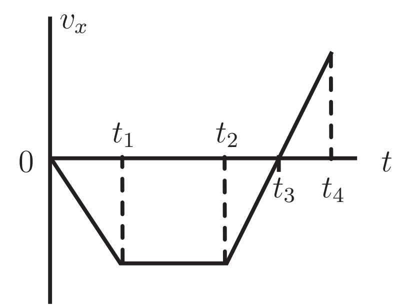
b. Suponga que $\beta = 45°$ y que el coeficiente de roce estático μ_e cumple con $\mu_e < 1$. Halle los valores posibles de w en función de r y μ_e. ¿Cómo varía el sentido de la fuerza de roce estático con los valores de w?

Tema 4

Trabajo y energía

---

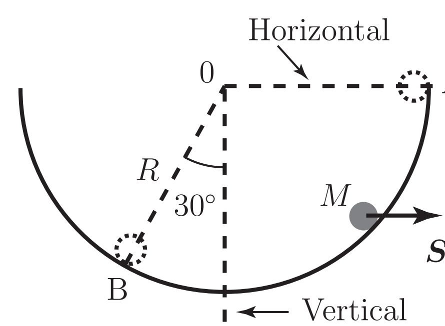
1. Una partícula se mueve sobre el eje x, siendo la representación gráfica de la componente x de su velocidad la que se muestra en la figura. En cada una de las siguientes casillas aparece el trabajo realizado por la fuerza neta sobre la partícula en un intervalo; indique su signo terminando de rellenar las casillas con los símbolos "=0", "> 0" y "< 0" que correspondan.



$W(0, t_1)$	$W(t_1, t_2)$	$W(t_2, t_3)$	$W(t_3, t_4)$

---

2. La figura muestra una pista semicircular sin roce, de radio $R = \sqrt{3}$ m. Una partícula de masa $M = 2\sqrt{3}$ kg se mueve apoyada sobre la pista. Sobre la partícula actúa, además de la fuerza gravitatoria y de contacto con la pista, una fuerza constante $\boldsymbol{S}$ horizontal dirigida hacia la derecha y con módulo 14 Newtons.

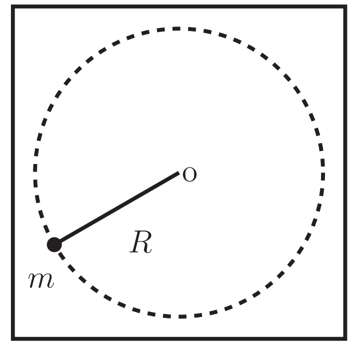


a. Calcule el trabajo que realiza cada una de las fuerzas que actúan sobre la partícula cuando ésta se mueve desde el punto A al punto B.

b. Si la rapidez de la partícula en el punto A es de 4 m/s halle su rapidez en el punto B y el módulo de la normal que en ese punto le aplica la pista (no olvide la fuerza $\boldsymbol{S}$ en su diagrama de fuerzas).

---

3. Una partícula de masa m atada a una cuerda tensa de radio R gira sobre una mesa horizontal con roce, siendo el coeficiente de roce dinámico μ, ver figura. La partícula inicia su movimiento con una rapidez v_0.

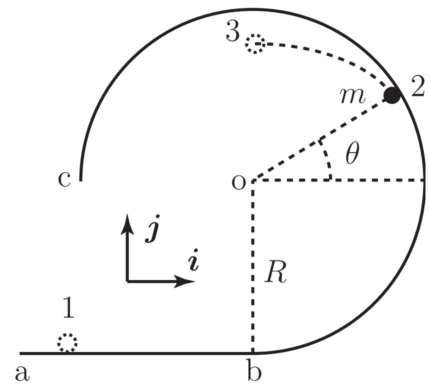


a. Halle la rapidez de la partícula cuando ha girado un ángulo θ (en radianes).

b. Tome $R = 1/2$ m, $\mu = 0.1$ y $v_0 = 4$ m/s y calcule cuántas vueltas da la partícula antes de detenerse.

4. La figura muestra una pista sin roce compuesta de dos tramos. El tramo ab es recto y horizontal, el tramo bc es vertical con forma de 3/4 de circunferencia de radio R y centro en el punto o.

Una partícula de masa m se lanza hacia la derecha desde el punto 1 y cuando llega al punto 2 abandona la pista y continúa con movimiento parabólico sometido a la gravedad, $\theta \in (0, \pi/2)$. El punto 3 indica el punto más alto de la trayectoria.



a. Halle la rapidez y el vector velocidad de la partícula en el punto 2.

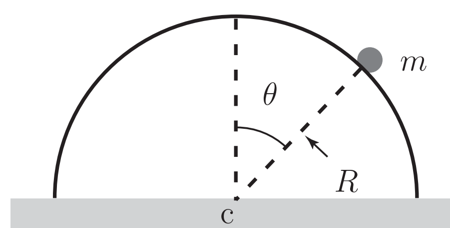
b. Calcule la energía de la partícula.

c. Utilizando conservación de la energía halle la altura del punto 3 respecto al tramo ab.

d. Encuentre la rapidez de la partícula en el punto 1.

5. Sobre una semiesfera lisa y de radio R resbala una partícula de masa m. La partícula parte del punto más alto de la semiesfera con una rapidez angular w_0.

a. Cuando la línea entre el centro c de la esfera y la partícula forma un ángulo θ con la vertical (ver figura) halle: la rapidez angular w y el módulo N de la normal.



b. ¿Para qué valor de $\cos(\theta)$ la partícula abandona la semiesfera?

c. Ahora se quiere que la partícula salga disparada horizontalmente desde el punto mas alto de la semiesfera sin que tenga oportunidad de resbalar. ¿Cuál es la menor velocidad angular w_0 que debe tener?

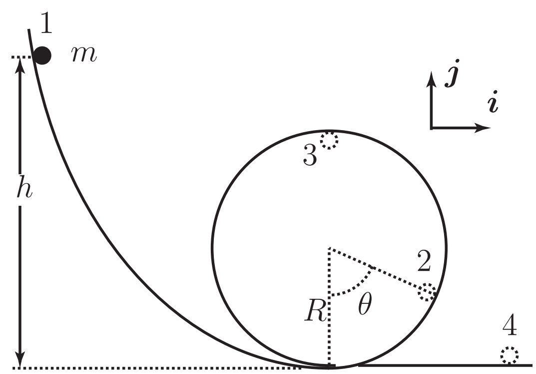
6. Cierta pista lisa comienza con una rampa vertical, continúa con un rizo vertical, circular y de radio R, y finaliza en un tramo recto. Una partícula de masa m se suelta del reposo desde el punto 1 a una altura desconocida h medida desde la base del rizo (ver figura). La partícula completa el rizo (pasa por los puntos 2 y 3) y luego continúa por el tramo recto (punto 4). El punto 3 es el más alto del rizo. Suponga que h es la mínima altura permitida para que la partícula complete una vuelta en el rizo.

a. Calcule la energía de la partícula tomando nivel cero de energía gravitacional en la base del rizo.

b. Encuentre el valor de h.

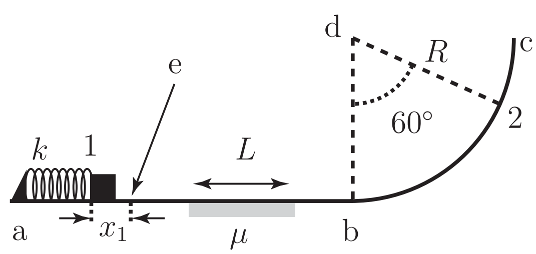
c. Halle el vector velocidad en el punto 2.

d. Encuentre la aceleración angular $\ddot{\theta}$ en el punto 2.



7. La figura muestra una pista compuesta de dos tramos. El tramo ab es recto y horizontal y el tramo bc es vertical con forma de 1/4 de circunferencia de radio $R = 5$ m y centro en el punto d. La pista es lisa a excepción de un trozo en el tramo recto de longitud L desconocida, siendo $\mu = 7/10$ el coeficiente de roce dinámico. En un extremo de la pista hay un resorte de constante elástica $k = 800$ N/m, el punto e es el punto de equilibrio del resorte.

Una partícula de masa $m = 2$ kg parte del reposo en el punto 1 donde se encuentra comprimiendo el resorte una longitud de $x_1 = 4/10$ m. La partícula no está unida al resorte, llega hasta el punto 2 y luego regresa.

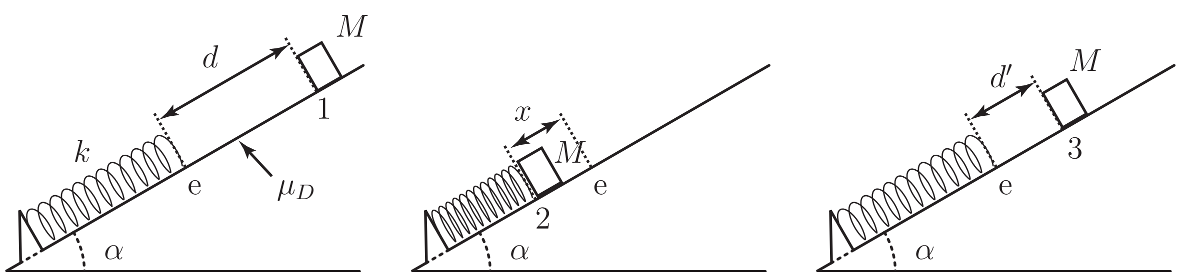


a. Halle el módulo de la fuerza normal debida a la pista en el punto 2.

b. Halle la longitud L.

c. Al regreso la partícula comprime nuevamente el resorte. Halle la nueva máxima compresión del resorte.

8. En la parte inferior de un plano inclinado $\alpha = 30°$ se encuentra un resorte de constante elástica $k = 200$ N/m. De un punto 1 a una distancia d del extremo libre del resorte (señalado como e en los dibujos) se suelta un bloque de masa $M = 4$ kg, siendo $\mu_D = \sqrt{3}/6$ el coeficiente de roce dinámico entre el plano y el bloque. El bloque comprime el resorte una longitud $x = 1/2$ m (punto 2) y luego se regresa deteniéndose en un punto 3 a una distancia d' del extremo libre del resorte.



a. Halle los módulos de las fuerzas normal y de roce dinámico.

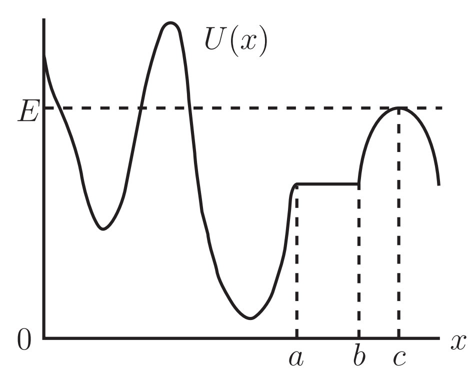
b. Determine d y d'.

c. Si en lugar de llegar al punto 3 el bloque permanece en reposo en el punto 2 halle la fuerza de roce estática (módulo y sentido) y los valores permitidos para el coeficiente de roce estático μ_E.

---

9. Cierta partícula está obligada a moverse sobre el eje x mientras está sometida a una fuerza neta cuya energía potencial $U(x)$ se muestra en la gráfica. La energía E de la partícula coincide con el máximo local de $U(x)$ en $x = c$. En el intervalo $[a, b]$ la energía potencial es constante.

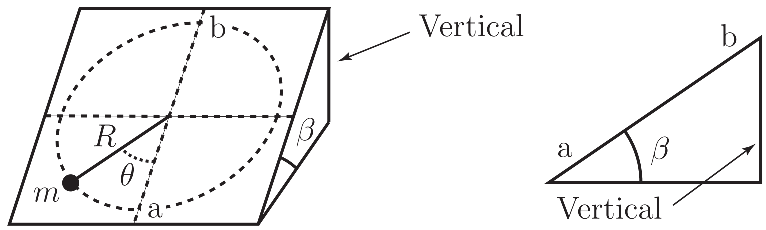
La partícula comienza su movimiento en el punto $x = b$ dirigiéndose hacia la izquierda del eje x.



a. Describa el movimiento ulterior de la partícula especificando dirección del movimiento, zonas de aceleración, zonas de desaceleración, zonas de velocidad constante, puntos donde se detiene.

b. Señale muy brevemente el cambio más resaltante en el movimiento si la energía es ligeramente menor. Señale también qué ocurre si es ligeramente mayor.

10. La figura abajo a la izquierda muestra una partícula de masa m que, atada a una cuerda de longitud R, describe una trayectoria circular sobre un plano inclinado un ángulo β respecto a la horizontal. El punto a es el más bajo de la trayectoria y el b el más alto. La figura a la derecha muestra un corte del plano inclinado. El coeficiente de roce dinámico entre el plano y la partícula es μ.



a. Halle los módulos de la normal y de la fuerza de roce dinámica cuando el eje que va del centro del círculo a la partícula forma un ángulo θ con el eje ab.

b. Tome nivel cero de energía potencial gravitacional en el punto a y halle la energía potencial de la partícula en el punto b. Determine también el trabajo realizado por el roce cuando la partícula va desde a hasta b.

c. Si la partícula parte del punto a con una rapidez v_a halle su rapidez cuando pasa por primera vez por el punto b.

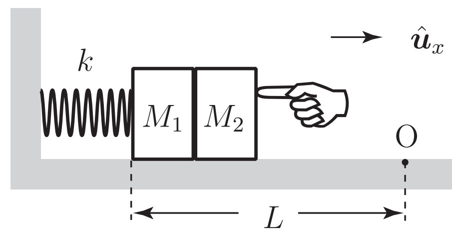
Tema 5

Oscilaciones

---

1. Una persona comprime un resorte de constante elástica k por medio de dos bloques de masas M_1 y M_2. Los bloques están en reposo sobre una superficie horizontal lisa y fija a Tierra (ver figura).

El punto O es el punto de equilibrio del resorte, y lo tomaremos como origen de coordenadas. L es la compresión del resorte cuando los bloques están en reposo. El resorte tiene un extremo atado a una pared y el otro atado al bloque #1. El sistema se deja libre y los dos bloques se mueven juntos (como un solo bloque) para luego separarse en el punto O.



a. Determine la velocidad de los dos bloques en el instante en que se separan.

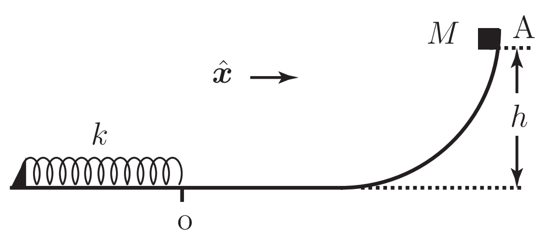
b. Tome $t = 0$ en el instante de separación de los bloques. Para $t \geq 0$ el movimiento de M_1 es armónico simple; halle para este movimiento su período, amplitud y fase inicial. Halle en función del tiempo las componentes x de la posición y velocidad de M_1 para $t \geq 0$. Precaución: L no es la amplitud.

---

2. La pista de la figura es lisa, en su porción horizontal tiene un resorte de constante elástica k con un extremo libre y un extremo fijo a una pared. Desde un punto A situado a una altura h parte del reposo un pequeño bloque de masa M. Cuando el bloque toca el resorte queda adherido al mismo y comienza a oscilar. Tome como instante $t = 0$ el momento de la colisión con el resorte y como origen de coordenadas el punto o (punto de equilibrio del resorte).

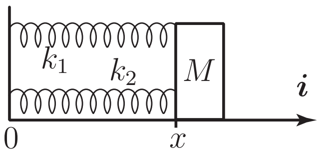
a. Halle la posición $x(t)$ del bloque para $t \geq 0$.

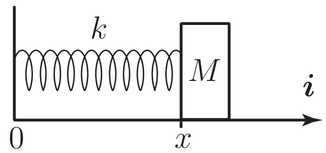
b. Encuentre los vectores posición y velocidad del bloque para el instante $t = \tau/3$, donde τ es el período del movimiento oscilatorio.



---

3. La figura abajo a la izquierda muestra un bloque sobre una superficie horizontal lisa sometido a la acción de dos resortes en paralelo. Los resortes están unidos a una pared lisa y al bloque, tienen longitudes naturales y constantes elásticas dadas por (l_1,k_1) y (l_2,k_2). El origen de coordenadas 0 está en la base de la pared y llamaremos x a la posición del bloque.



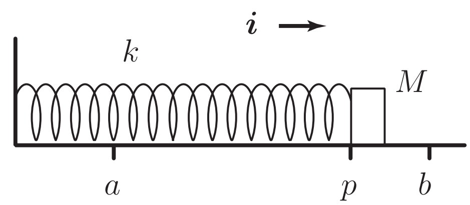


a. Halle la fuerza neta que actúa sobre el bloque de la izquierda. Determine el punto de equilibrio $x = x_e$ para dicha fuerza. Demuestre que la fuerza neta se puede escribir como $\boldsymbol{F} = -k'(x - x_e)\,\boldsymbol{i}$ donde k' es una constante que debe determinar.

b. Considere el resorte en la figura de arriba a la derecha. ¿Qué constante elástica k y longitud natural l debe tener este resorte para aplicar al bloque la misma fuerza que los resortes de la izquierda?

---

4. La figura muestra un resorte con un extremo atado a una pared y el otro a un bloque. El bloque tiene masa $M = 4$ kg, se apoya en una superficie horizontal lisa y su movimiento oscilatorio tiene como puntos extremos a los puntos a y b.



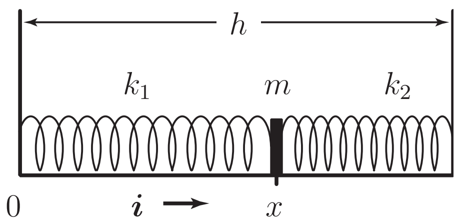
a. El bloque tarda un tiempo $t_{ab} = (1/5)$ s en recorrer la distancia $d_{ab} = 8$ m entre los puntos a y b. Halle la amplitud A, el período τ y la frecuencia angular ω del movimiento. Encuentre también la constante elástica k del resorte.

b. Tome nula la energía potencial en el punto de equilibrio del resorte. Halle la energía del sistema y la rapidez máxima del bloque.

c. En el instante $t = 0$ el bloque se encuentra en el punto p y moviéndose hacia la derecha. La distancia entre a y p es $d_{ap} = 3A/2$. Tome origen en el punto de equilibrio del resorte y halle la posición $x(t)$ y velocidad $\dot{x}(t)$ del bloque.

d. Determine el tiempo que tarda el bloque en ir desde el punto p al punto a por primera vez.

5. La figura muestra un bloque muy delgado de masa m que se encuentra sobre una superficie horizontal lisa y que está unido a dos resortes de constantes elásticas k_1 y k_2. Los resortes tienen longitudes naturales l_{01} y l_{02} y están unidos a su vez a dos paredes que distan entre sí una distancia h.



El origen de coordenadas 0 está en la base de la pared izquierda y llamaremos x a la posición del bloque.

a. Imagine que en el instante mostrado en la figura los dos resortes están estirados. Halle la cantidad en que está estirado cada resorte respecto a su longitud natural. Determine la fuerza neta $\boldsymbol{F}$ sobre la partícula.

b. Encuentre el punto de equilibrio $x = x_e$ de la fuerza neta $\boldsymbol{F}$.

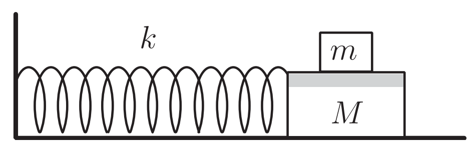
c. Haga el cambio de variables de x a $z = x - x_e$ y escriba $\boldsymbol{F}$ en función de z. Escriba la aceleración de la partícula en función de $\ddot{z}$. A partir de la segunda ley de Newton para la partícula (escrita en términos de z y $\ddot{z}$) halle la frecuencia de oscilación del bloque.

---

6. El resorte de la figura está unido a la pared y a un bloque de masa M que se apoya sobre una superficie lisa y horizontal. Encima del bloque se encuentra apoyado un bloquecito de masa m. Hay roce entre los dos bloques. El sistema ejecuta un movimiento armónico simple de amplitud A y el bloquecito no desliza sobre el bloque.

a. Halle los módulos de: la aceleración máxima del sistema y la fuerza de roce máxima que actúa sobre el bloquecito.

b. ¿Qué rango de valores está permitido para el coeficiente de roce estático μ ?



Tema 6

Momentum lineal y colisiones

---

1. Desde cierto sistema de referencia inercial se observa que dos partículas se mueven sobre una mesa lisa con velocidades constantes. Sus masas y velocidades respectivas son $M_1 = 1$ kg, $M_2 = 2$ kg, $\boldsymbol{v}_1 = (4\hat{\boldsymbol{x}} + 3\hat{\boldsymbol{y}})$ m/s y $\boldsymbol{v}_2 = -2\hat{\boldsymbol{x}}$ m/s. En cierto instante las partículas coliden entre sí y luego permanecen unidas.

a. Calcule el vector velocidad del sistema de las dos partículas después de la colisión.

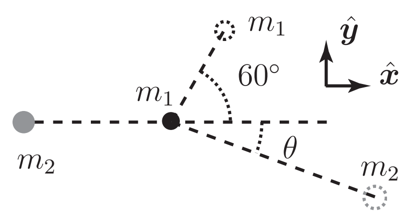
b. Halle el porcentaje de energía cinética perdida durante la colisión.

---

2. Un cuerpo de masa $m_2 = 2$ kg y rapidez $v_2 = 5$ m/s colide con otro cuerpo en reposo de masa $m_1 = 1$ kg. Los cuerpos se encuentran sobre una superficie horizontal lisa. Como consecuencia del choque m_1 adquiere una velocidad de módulo 2 m/s en una dirección de 60° respecto a la velocidad inicial de m_2, ver figura.

a. Halle el vector velocidad de m_2 luego de la colisión y el ángulo θ.

b. Halle el impulso $\boldsymbol{I}$ que siente m_2 durante la colisión. Si la misma duró un tiempo $\Delta t = 0.01$ s encuentre la fuerza promedio que m_1 le aplicó a m_2 durante el choque.

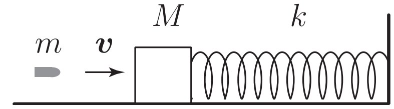


---

3. Un bloque de masa M se encuentra sobre una superficie horizontal lisa y se apoya contra un resorte de constante elástica k que no está deformado. El otro extremo del resorte está sujeto a una pared. Se desea medir la rapidez v de un proyectil de masa m. Para ello se dispara el proyectil a quemarropa contra el bloque, ver figura. El proyectil se incrusta en el bloque penetrando completamente antes que el bloque tenga tiempo de moverse apreciablemente. Luego el resorte comienza a comprimirse siendo x la máxima compresión.

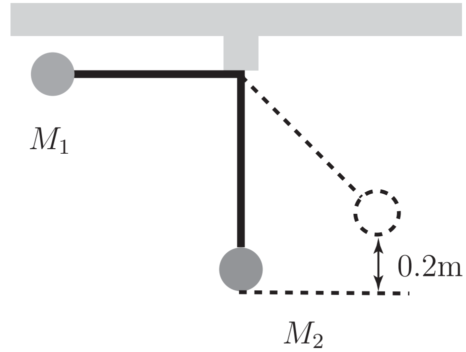
a. Encuentre la rapidez v del proyectil.

b. Cuando el proyectil penetra en el bloque se disipa una energía Q en forma de calor por efecto del roce entre la bala y el bloque. Halle el cociente entre Q y la energía final del sistema.



---

4. Dos partículas de masas $M_1 = 2$ kg y $M_2 = 5$ kg están atadas a los extremos de dos cuerdas ideales, tensas y de longitud $L = 0.8$ m cada una, ver figura. Inicialmente las dos partículas están en reposo, la cuerda atada a la #1 está horizontal mientras que la otra coincide con la vertical. Se suelta la partícula #1 y choca con la #2. Luego del choque la partícula #2 alcanza una altura máxima de $h = 0.2$ m medida desde el punto más bajo de su trayectoria.



a. Halle la rapidez de la partícula #1 justo antes de la colisión.

b. Halle la rapidez con la cual la partícula #2 inicia su movimiento ascendente.

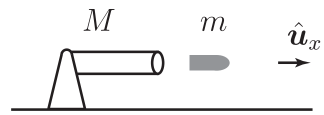
c. Halle la velocidad de la partícula #1 justo después de la colisión (indique su módulo y dirección).

d. ¿Es el choque elástico? Justifique su respuesta.

---

5. Un cañón de masa M es capaz de disparar balas de masa m con una rapidez v relativa al cañón. Suponga que el cañón se coloca sobre una superficie completamente lisa.

Inicialmente el cañón se encuentra en reposo respecto a un observador inercial y luego dispara una bala horizontalmente en la dirección $\hat{\boldsymbol{u}}_x$, ver figura.



Halle las velocidades $\boldsymbol{v}_m$ y $\boldsymbol{v}_M$, respecto al observador, que adquieren la bala y el cañón apenas se realiza el disparo.

---

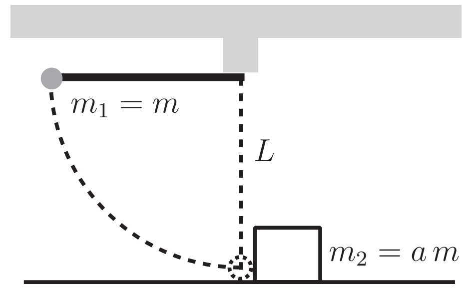
6. Un joven de masa M está montado sobre un trineo de masa m que desliza sobre un lago congelado y liso. El trineo desliza en dirección $\boldsymbol{i}$ con rapidez v_0 respecto al lago. En cierto momento el joven salta del trineo en dirección $\boldsymbol{j}$ y con rapidez v respecto al trineo.

a. Halle los vectores velocidad del joven y del trineo respecto al lago una vez que el joven abandona el trineo.

b. Calcule la energía cinética ganada o perdida por el sistema joven-trineo durante el salto.

---

7. La figura muestra una partícula de masa $m_1 = m$ sujeta a una cuerda tensa e ideal de longitud L y un bloque de masa $m_2 = am$ sobre una superficie horizontal. La partícula se suelta del reposo estando la cuerda horizontal; en el punto más bajo de su trayectoria circular la partícula golpea elásticamente el bloque que se encuentra en reposo. Suponga que $a \geq 1$.

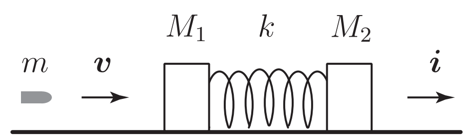


a. Halle la velocidad de cada cuerpo justo después de la colisión.

b. Calcule la altura hasta la cual asciende nuevamente la partícula.

c. ¿Qué resultados se obtienen en las partes **a** y **b** en los casos $a = 1$ y $a \gg 1$?

8. Los bloques de la figura, con masas M_1 y M_2, están unidos a un resorte ideal (sin masa) de constante elástica k y se apoyan en una superficie horizontal lisa.



En el instante mostrado los bloques están en reposo, el resorte tiene su longitud natural y una bala de masa m se dirige al primer bloque con una velocidad $\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{i}$.

La bala penetra y se queda en el interior del bloque M_1; supondremos que penetra completamente antes que el bloque tenga tiempo de desplazarse apreciablemente. Llamaremos sistema al conjunto formado por los bloques, la bala y el resorte. La energía del sistema es $E = E_c + kx^2/2$ donde E_c es la energía cinética total de los componentes del sistema y x es la compresión o elongación del resorte respecto a su longitud natural.

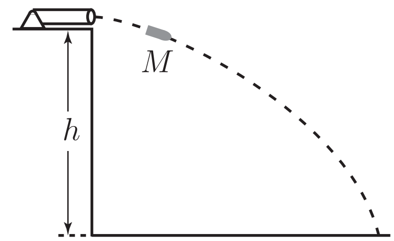
a. Halle el momentum lineal del sistema antes y después de la colisión.

b. Determine la velocidad $\boldsymbol{v}_{\mathrm{JD}}$ del bloque M_1 y de la bala justo después de la colisión. Halle la energía del sistema E_{JD} justo después de la colisión.

c. Note que cuando el resorte está completamente comprimido la velocidad relativa entre los bloques es nula. Encuentre la velocidad $\boldsymbol{v}_{\mathrm{compr}}$ de los bloques y de la bala cuando el resorte está completamente comprimido.

d. Halle la energía cinética $E_{\mathrm{c,compr}}$ del sistema cuando el resorte está completamente comprimido y calcule la máxima compresión del resorte $x_{\mathrm{Máx}}$.

9. Desde un acantilado a una altura $h = 125$ m de la playa se lanza horizontalmente un proyectil con rapidez inicial 100 m/s, ver figura. El proyectil tiene una masa $M = 5$ kg y dos segundos después del lanzamiento explota en dos pedazos de masas $M_1 = 3$ kg y $M_2 = 2$ kg. Un segundo después de la explosión el pedazo M_1 cae a 200 m de la base del acantilado. Halle la posición del segundo pedazo para ese instante.



7-Respuestas

Vectores

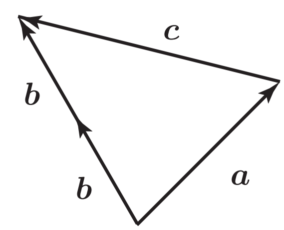
---

1. $\theta_x = \theta_y = \pi/4$ (por simetría), $\quad \theta_z = \pi/2$

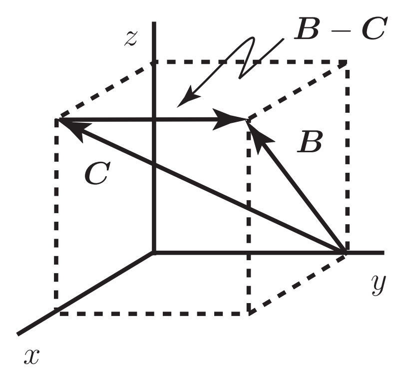
---

2. Por simetría los cosenos directores (a las tres aristas que salen del punto) cumplen $\cos(\theta_x) = \cos(\theta_y) = \cos(\theta_z) = 1/\sqrt{3}$, luego $\theta_z = \arccos(1/\sqrt{3})$.

3.



4.



a. $\boldsymbol{A} = l\hat{\boldsymbol{z}}\,, \qquad \boldsymbol{B} = l\hat{\boldsymbol{x}} + l\hat{\boldsymbol{z}}\,, \qquad \boldsymbol{C} = l\hat{\boldsymbol{x}} - l\hat{\boldsymbol{y}} + l\hat{\boldsymbol{z}}\,,$

$|\boldsymbol{A}| = l\,, \qquad |\boldsymbol{B}| = l\sqrt{2}\,, \qquad |\boldsymbol{C}| = l\sqrt{3}$

b. $\theta_z = \arccos(C_z/|\boldsymbol{C}|) = \arccos(1/\sqrt{3})$

c. $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C} = l\hat{\boldsymbol{y}}$

5.

a. $\boldsymbol{a} = \hat{\boldsymbol{x}} + 2\hat{\boldsymbol{y}}\,, \quad \boldsymbol{b} = -\hat{\boldsymbol{y}} - 3\hat{\boldsymbol{z}}$

b. $P_3 = (2, 4, 3)\,, \quad P_4 = (1, 2, 3)$

c. $$\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$$

6.

a. $$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = 2\,, \quad \alpha = \pi/3$$

b. $$A = 2\sqrt{3}$$

7.

a. $$\boldsymbol{a} = P_2 - P_1 = (1,1,0)\,, \quad \boldsymbol{b} = P_3 - P_1 = (0,3,0)\,, \quad \boldsymbol{c} = P_4 - P_1 = (0,1,3)$$

b. $$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = (0,4,3)\,, \quad |\boldsymbol{d}| = 5$$

c. $$P_5 = P_4 + \boldsymbol{a} = (1,3,3)\,, \quad \alpha = \text{ángulo}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) = \arccos\left(\frac{13}{5\sqrt{10}}\right)$$

d. $$\text{Volumen} = |\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})| = 9$$

---

8. $$A_x = 1\,, \quad A_y = -2$$

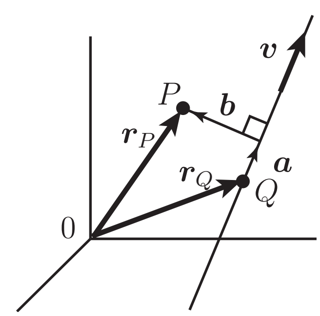
---

9. Ayuda para la demostración:

note que $\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_Q = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ luego

$(\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_Q)\times\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{v}$ por lo cual

$|(\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_Q)\times\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{v}| = d\,|\boldsymbol{v}|$.



8-Respuestas

Cinemática

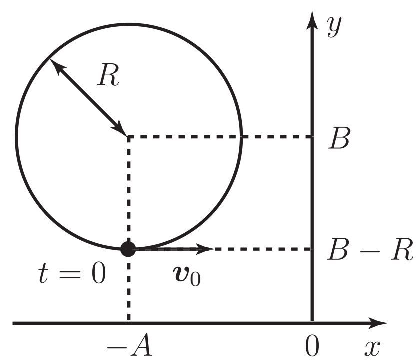
1.

a. $\boldsymbol{v} = Rw\,[\cos(wt)\boldsymbol{i} + \text{sen}(wt)\boldsymbol{j}]\,, \quad \boldsymbol{a}(t) = Rw^2\,[-\text{sen}(wt)\boldsymbol{i} + \cos(wt)\boldsymbol{j}]\,, \quad |\boldsymbol{v}| = Rw$

b. Tenemos que $x = [R\,\text{sen}(wt) - A]$ y $y = [B - R\cos(wt)]$.
Luego la ecuación de la trayectoria es

$$(x + A)^2 + (y - B)^2 = R^2\,.$$

Se trata de una circunferencia de radio R con centro en el punto $(-A, B)$.



c. $\boldsymbol{r}(0) = [-A\,\boldsymbol{i} + (B - R)\,\boldsymbol{j}]$ y $\boldsymbol{v}_0 \equiv \boldsymbol{v}(0) = Rw\,\boldsymbol{i}$.

2.

a. $$\boldsymbol{r}(t) = t^3\hat{\boldsymbol{u}}_x + (-2t^2 + 3)\hat{\boldsymbol{u}}_y + 4\hat{\boldsymbol{u}}_z\,, \quad \boldsymbol{a}(t) = 6t\hat{\boldsymbol{u}}_x - 4\hat{\boldsymbol{u}}_y$$

b. $$\boldsymbol{r}(3) = 27\hat{\boldsymbol{u}}_x - 15\hat{\boldsymbol{u}}_y + 4\hat{\boldsymbol{u}}_z\,, \quad \boldsymbol{v}(3) = 27\hat{\boldsymbol{u}}_x - 12\hat{\boldsymbol{u}}_y$$
$$\boldsymbol{a}(3) = 18\hat{\boldsymbol{u}}_x - 4\hat{\boldsymbol{u}}_y\,, \quad v(3) = 3\sqrt{97}$$

c. $$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{r}(3) - \boldsymbol{r}(0) = 27\hat{\boldsymbol{u}}_x - 18\hat{\boldsymbol{u}}_y\,, \quad \boldsymbol{v}_{\text{media}} = \frac{1}{3}\boldsymbol{D} = 9\hat{\boldsymbol{u}}_x - 6\hat{\boldsymbol{u}}_y$$
$$\boldsymbol{a}_{\text{media}} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{v}(3) - \boldsymbol{v}(0)) = 9\hat{\boldsymbol{u}}_x - 4\hat{\boldsymbol{u}}_y$$

d. $$t = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{22} - 2}{3}}$$

3.

a. $$x_1 = 1\,, \quad x_2 = -1/9$$

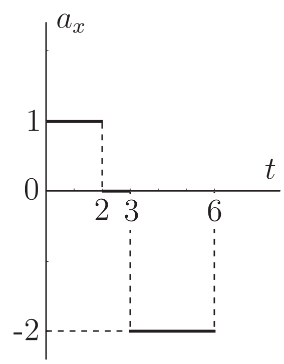
b. $$x_1' = 0\,, \quad x_2' = \ 8/9$$

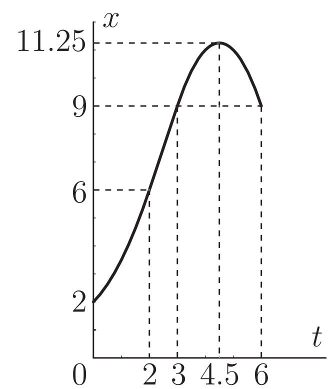
4.

a.
$$v_x(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } t \in [0,2] \\ 3 & \text{si } t \in [2,3] \\ -2t+9 & \text{si } t \in [3,6] \end{cases}$$

b.
$$a_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (0,2) \\ 0 & \text{si } t \in (2,3) \\ -2 & \text{si } t \in (3,6) \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} + t + 2 & \text{si } t \in [0,2] \\ 3t & \text{si } t \in [2,3] \\ -t^2 + 9t - 9 & \text{si } t \in [3,6] \end{cases}$$

c.





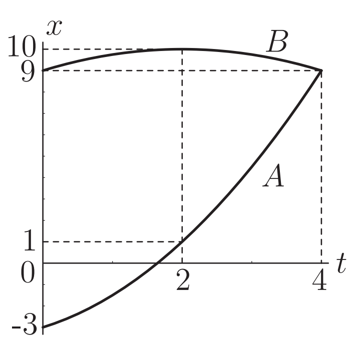
5.

a. Partícula A: $\quad a_x = 1 \qquad v_x = t+1 \qquad x = \dfrac{t^2}{2} + t - 3$

Partícula B: $\quad a_x = -\dfrac{1}{2} \qquad v_x = -\dfrac{t}{2} + 1 \qquad x = -\dfrac{t^2}{4} + t + 9$

b. $$t_{\text{ch}} = 4\,, \quad x_{\text{ch}} = 9$$

c.



d. La partícula A parte de $x = -3$ y se mueve en dirección del eje x positivo acelerando (con aceleración constante) hasta el lugar del choque. La partícula B parte de $x = 9$ y se mueve inicialmente en dirección $\boldsymbol{i}$ desacelerando hasta $x = 10$ ($t = 2$) donde se detiene, luego regresa acelerando hasta el punto del choque en $x = 9$.

e. La distancia recorrida por B es 2 y su desplazamiento es nulo.

6.

a.
$$\mathrm{tg}(\alpha) = 2x/b\,.$$

b.
$$v_x = \frac{bv}{\sqrt{b^2+4x^2}}\,, \quad v_y = \frac{2xv}{\sqrt{b^2+4x^2}}\,.$$

7.

a.
$$\ddot{x} = \ \ g\cos(\alpha)\,, \quad \dot{x} = \ \ g\cos(\alpha)t + v_0\mathrm{sen}(\theta)\,, \quad x = \ \ \frac{g}{2}\cos(\alpha)t^2 + v_0\mathrm{sen}(\theta)t\,,$$
$$\ddot{z} = -g\mathrm{sen}(\alpha)\,, \quad \dot{z} = -g\mathrm{sen}(\alpha)t + v_0\cos(\theta)\,, \quad z = -\frac{g}{2}\mathrm{sen}(\alpha)t^2 + v_0\cos(\theta)t\,,$$

b. La máxima separación ocurre para $\dot{z} = 0$ y vale $z = \dfrac{v_0^2\cos^2(\theta)}{2g\,\mathrm{sen}(\alpha)}$

c. El punto de caída ocurre para $z = 0$ y la distancia vale

$$x(\theta) = \frac{v_0^2}{g\,\mathrm{sen}(\alpha)}\left[\frac{1+\cos(2\theta)}{\mathrm{tg}(\alpha)} + \mathrm{sen}(2\theta)\right]\,.$$

La distancia máxima ocurre para $dx(\theta)/d\theta = 0$.

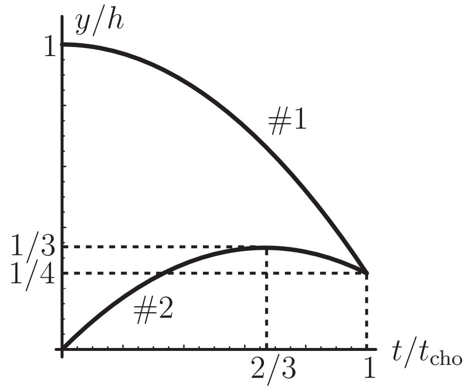
---

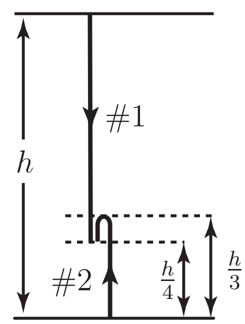
8. Tomaremos el origen en la base del edificio y el eje y positivo hacia arriba.

a.
$$t_{\mathrm{cho}} = \sqrt{\frac{3h}{2g}}\,, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2gh}{3}}\,.$$

b.
$$\boldsymbol{v}_1 = -\sqrt{\frac{3hg}{2}}\,\boldsymbol{j}\,, \quad \boldsymbol{v}_2 = -\sqrt{\frac{hg}{6}}\,\boldsymbol{j}\,.$$

c. La figura siguiente a la izquierda muestra las alturas de las partículas (en unidades de h) en función del tiempo (en unidades de t_{cho}). La figura siguiente a la derecha muestra las trayectorias; aunque todo el movimiento ocurre en la misma recta vertical se dibujan las trayectorias sobre distintas verticales para apreciar mejor el movimiento.





---

9. Todas las unidades están expresadas en el sistema MKS. L indica lámpara, A ascensor y T Tierra.

a. Tomaremos como $t=0$ el instante para el cual se desprende la lámpara.

$$\boldsymbol{a}_{L,A}=\boldsymbol{a}_{L,T}-\boldsymbol{a}_{A,T}=9\,\hat{\boldsymbol{u}}_y\,,\quad \boldsymbol{v}_{L,A}=9t\,\hat{\boldsymbol{u}}_y\,,\quad \boldsymbol{r}_{L,A}=\frac{9}{2}\,t^2\,\hat{\boldsymbol{u}}_y\,.$$

b.
$$y_{L,A}=\frac{9}{2}\,t^2=2 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{2}{3}$$

c.
$$D=\frac{14}{9}$$

---

10. Llamaremos $\hat{\boldsymbol{E}}$ y $\hat{\boldsymbol{N}}$ a los vectores unitarios en dirección Este y Norte respectivamente.

$$\boldsymbol{v}=(300\,\hat{\boldsymbol{E}}+60\,\hat{\boldsymbol{N}})\,\mathrm{km/h}\,,\qquad v=60\,\sqrt{26}\,\mathrm{km/h}\,.$$

11.
$$\boldsymbol{v}_{\text{gota,Tierra}}=-\frac{v}{\mathrm{tg}(\alpha)}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,,\qquad \boldsymbol{v}_{\text{gota,Auto}}=-\frac{v}{\mathrm{tg}(\alpha)}\,\hat{\boldsymbol{y}}-v\,\hat{\boldsymbol{x}}\,.$$

---

12. Los subíndices L, P y T hacen referencia a la lámpara, al pasajero y al referencial inercial de Tierra respectivamente.

a.
$$\boldsymbol{a}_{L,T}=g\,[\mathrm{sen}(\alpha)\boldsymbol{i}-\cos(\alpha)\boldsymbol{j}]\,,\quad \boldsymbol{a}_{L,P}=[g\,\mathrm{sen}(\alpha)-a]\boldsymbol{i}-g\cos(\alpha)\boldsymbol{j}\,.$$

b.
$$v_x=[g\,\mathrm{sen}(\alpha)-a]t\,,\qquad v_y=-g\cos(\alpha)t$$
$$x=[g\,\mathrm{sen}(\alpha)-a]\,\frac{t^2}{2}-\frac{L}{2}\,,\qquad y=-g\cos(\alpha)\,\frac{t^2}{2}+H$$

c.
$$t = \sqrt{\frac{2H}{g\cos(\alpha)}}\,, \qquad L = \frac{2H\,[g\,\mathrm{sen}(\alpha) - a]}{g\cos(\alpha)}\,.$$

d. Vista por el pasajero la trayectoria es una línea recta de ecuación

$$y = -\frac{g\cos(\alpha)}{g\,\mathrm{sen}(\alpha) - a}\,x\,.$$

Vista desde Tierra la trayectoria es una parábola.

---

13. Las letras b, p y T designarán respectivamente el bote, pasajero y Tierra.

a.
$$\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{3\,\hat{\boldsymbol{x}} + 4\,\hat{\boldsymbol{y}}}{5}\,, \quad \boldsymbol{v}_{b,T} = (-2\,\hat{\boldsymbol{x}} - 10\,\hat{\boldsymbol{y}})\,\mathrm{m/s}\,, \quad \boldsymbol{v}_{p,T} = (4\,\hat{\boldsymbol{x}} - 2\,\hat{\boldsymbol{y}})\,\mathrm{m/s}\,.$$

b.
$$t = \frac{1}{2}\,\mathrm{s}\,, \quad d = \sqrt{26}\,\mathrm{m}\,.$$

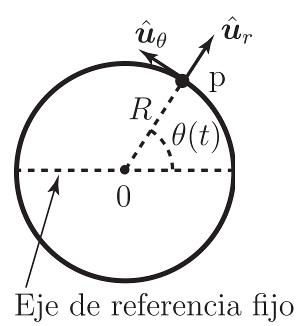
14.

a.
$$\hat{\boldsymbol{u}}_r = \cos[\theta(t)]\hat{\boldsymbol{u}}_x + \mathrm{sen}[\theta(t)]\hat{\boldsymbol{u}}_y\,, \quad \hat{\boldsymbol{u}}_\theta = -\mathrm{sen}[\theta(t)]\hat{\boldsymbol{u}}_x + \cos[\theta(t)]\hat{\boldsymbol{u}}_y$$

b.
$$\dot{\hat{\boldsymbol{u}}}_r = \dot{\theta}[-\mathrm{sen}(\theta)\hat{\boldsymbol{u}}_x + \cos(\theta)\hat{\boldsymbol{u}}_y] = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{u}}_\theta\,,$$
$$\dot{\hat{\boldsymbol{u}}}_\theta = \dot{\theta}[-\cos(\theta)\hat{\boldsymbol{u}}_x - \mathrm{sen}(\theta)\hat{\boldsymbol{u}}_y] = -\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{u}}_r\,.$$

c.
$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{u}}_r + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta\,, \quad \boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{u}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{u}}_\theta\,.$$

d.
$$\boldsymbol{v} = R\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta\,, \qquad \boldsymbol{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{\boldsymbol{u}}_r + R\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta\,,$$
$$v = Rw \qquad |\boldsymbol{a}_{\mathrm{radial}}| = Rw^2 = \frac{v^2}{R}$$



15.

a.
$$R = 4\ \mathrm{m}\,, \quad w = \frac{\pi}{4}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,, \quad \theta(t) = \frac{\pi\,t}{4} - \frac{\pi}{2}\ \ (\text{con } t \text{ en segundos y } \theta \text{ en radianes})\,.$$

b.
$$\boldsymbol{v}_B = \frac{\pi}{2}(\hat{\boldsymbol{u}}_x - \sqrt{3}\,\hat{\boldsymbol{u}}_y)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,, \quad \boldsymbol{a}_B = \frac{\pi^2}{8}(\sqrt{3}\,\hat{\boldsymbol{u}}_x + \hat{\boldsymbol{u}}_y)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,, \quad l = \frac{4\pi}{3}\,\mathrm{m}\,.$$

16.

a. La rapidez de cualquier punto del aro respecto a c es $V = R\omega$, luego $\omega = V/R$.

b.
$$\boldsymbol{V}_A = 2V\boldsymbol{i}\,, \quad \boldsymbol{V}_B = 0\,, \quad \boldsymbol{V}_D = V\boldsymbol{i} + V\boldsymbol{j}\,.$$

c.
$$\boldsymbol{V}_E = V(1-\cos(\beta))\boldsymbol{i} + V\mathrm{sen}(\beta)\boldsymbol{j}\,, \qquad |\boldsymbol{V}_E| = V \quad \Rightarrow \quad \beta = \pm 60^\circ\,.$$

---

17. Todas las unidades están expresadas en el sistema MKS.

a.
$$l = t^3 + 2t^2$$

b.
$$R = 100/3$$

9-Respuestas

Dinámica

1.

b.
$$l_1 = (y_1 - y) + (y_3 - y) + \text{constantes}\,, \quad l_2 = y_2 + y + \text{constantes}$$
$$0 = 2\ddot{y}_2 + \ddot{y}_3 + \ddot{y}_1$$

c.
$$m_1\ddot{y}_1 = m_1 g - T_1\,, \quad m_2\ddot{y}_2 = m_2 g - T_2\,, \quad m_3\ddot{y}_3 = m_3 g - T_1\,,$$
$$0 = 2\ddot{y}_2 + \ddot{y}_3 + \ddot{y}_1 \;\; \text{(ligadura)}\,, \quad 0 = 2T_1 - T_2 \;\; \text{(polea móvil)}\,,$$
$$0 = 2T_2 - R \;\; \text{(polea fija, } R \text{ es la fuerza que aplica el techo)}$$

d.
$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = -2\,,\ \ddot{y}_3 = 6\,,\ T_1 = 12\,,\ T_2 = 24\,,\ \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = -2\hat{\boldsymbol{u}}_y\,,\ \boldsymbol{a}_3 = 6\hat{\boldsymbol{u}}_y\,.$$

2.

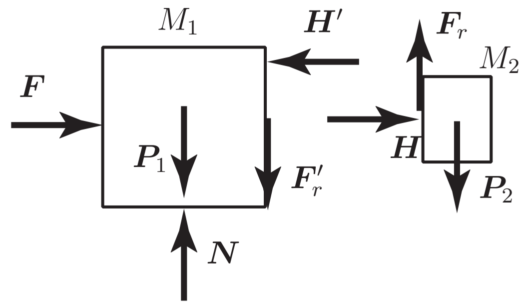
b. H es la distancia del piso al centro de la polea fija.

$$l_1 = x_1 - y_p + \text{constantes}\,, \quad l_2 = (y_2 - y_p) + (H - y_p) + \text{constantes}\;\;,$$
$$0 = \ddot{x}_1 - \ddot{y}_p\,, \quad 0 = \ddot{y}_2 - 2\ddot{y}_p\,, \quad (\Rightarrow \quad \ddot{y}_2 = 2\ddot{x}_1)\,.$$

c.
$$m_1\ddot{x}_1 = -T_1\,, \quad N_1 = m_1 g\,, \quad m_2\ddot{y}_2 = m_2 g - T_2\,,$$
$$\ddot{y}_2 = 2\ddot{x}_1 \;\; \text{(ligadura)}\,, \quad 0 = 2T_2 - T_1 \;\; \text{(polea móvil)}\,,$$
$$0 = T_1\,\boldsymbol{i} + T_1\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{R} \;\; \text{(polea fija, } \boldsymbol{R} \text{ es la fuerza que aplica el soporte)}$$

d.
$$T_1 = \frac{2m_1 m_2\, g}{m_1 + 4m_2}\,, \qquad T_2 = \frac{m_1 m_2\, g}{m_1 + 4m_2}\,,$$
$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{2m_2\, g}{m_1 + 4m_2}\,\boldsymbol{i}\,, \quad \boldsymbol{a}_2 = \frac{4m_2\, g}{m_1 + 4m_2}\,\boldsymbol{j}\,, \quad \boldsymbol{a}_{\text{polea móvil}} = \frac{2m_2\, g}{m_1 + 4m_2}\,\boldsymbol{j}\,.$$

3.



a. Normal con el piso: $|\boldsymbol{N}| = N$.

Peso de cada cuerpo: $|\boldsymbol{P}_1| = M_1 g\,, \quad |\boldsymbol{P}_2| = M_2 g$.

Normal entre los bloques: $|\boldsymbol{H}| = |\boldsymbol{H}'| = H$.

Roce entre los cuerpos: $|\boldsymbol{F}_r| = |\boldsymbol{F}'_r|$.

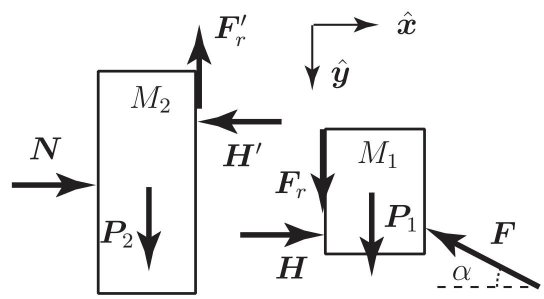
Otra fuerza aplicada a M_1: $|\boldsymbol{F}| = F$.

b.
$$\begin{aligned} M_1 :&\quad M_1 a = F - H\,, \quad N = M_1 g\,, \\ M_2 :&\quad M_2 a = H\,, \quad F_r - M_2 g = 0\,. \end{aligned}$$

c.
$$|\boldsymbol{F}_r| < \mu_e |\boldsymbol{H}| \quad \Rightarrow \quad \frac{(M_1 + M_2) g}{\mu_e} < F$$

4.
$$m\left(1 - \frac{\mu_e}{\mathrm{tg}(\alpha)}\right) \leq M \leq m\left(1 + \frac{\mu_e}{\mathrm{tg}(\alpha)}\right)$$

5.



a. Normal con la pared: $|\boldsymbol{N}| = N$.

Pesos: $|\boldsymbol{P}_1| = M_1 g\,, \quad |\boldsymbol{P}_2| = M_2 g$.

Normal entre los bloques: $|\boldsymbol{H}| = |\boldsymbol{H}'| = H$.

Roce entre los cuerpos: $\boldsymbol{F}_r = -\boldsymbol{F}'_r = F_r \hat{\boldsymbol{y}}$.

Otra fuerza aplicada a M_1: $|\boldsymbol{F}| = F$.

b.
$$\begin{aligned} M_1 :&\quad H = F\cos(\alpha)\,, &\quad M_1 a = F_r + M_1 g - F\mathrm{sen}(\alpha)\,, \\ M_2 :&\quad N = H\,, &\quad M_2 a = M_2 g - F_r\,. \end{aligned}$$

c.
$$\boldsymbol{a} = 8\,\hat{\boldsymbol{y}}\ \mathrm{m/s}\,, \quad \boldsymbol{F}_r = 4\,\hat{\boldsymbol{y}}\ \mathrm{N}\,, \quad \mu_e > \frac{2}{3\sqrt{3}}\,.$$

---

6. Las dimensiones de todas las cantidades están expresadas en el sistema MKS.

a.
$$a = 5\,, \quad T = 60\,, \quad F_r = 10\sqrt{3}\,, \quad H = 20\,, \quad N = 30\sqrt{3}\,.$$

b.
$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \mu\,.$$

7.

a.
$$T_1 = M_1(g + a)\,, \quad T_2 = M_2(g - a)\,.$$

b. Caso 1: $a = g\left(\dfrac{M_2 - M_1 - \mu M_3}{M_1 + M_2 + M_3}\right)$, caso 2: $a = g\left(\dfrac{M_2 - M_1 + \mu M_3}{M_1 + M_2 + M_3}\right)$.

c. En el caso 1 $a = 3\ \mathrm{m/s^2}$ y el movimiento es acelerado. En el caso 2 $a = 5\ \mathrm{m/s^2}$ y el movimiento es retardado.

d. En el caso 1 $a = -\mu g/3$ y en el caso 2 $a = \mu g/3$. En ambos casos el movimiento es retardado y si la superficie es suficientemente larga el bloque puede detenerse sobre ella. Luego de detenerse el sistema permanece en reposo ya que cuando el sistema está en reposo la aceleración es nula (los bloques que cuelgan tienen la misma masa, las tensiones son iguales y el roce estático es nulo).

---

8. Respuesta sólo a la última parte de la pregunta **c**.
$$\boldsymbol{a}_1 = -2g\left(\frac{m_2 - 2\mu\, m_1}{m_2 + 4m_1}\right)\hat{\boldsymbol{x}}\,, \quad \boldsymbol{a}_2 = g\left(\frac{m_2 - 2\mu\, m_1}{m_2 + 4m_1}\right)\hat{\boldsymbol{y}}\,.$$

9.
$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{M_1\, R}{M_2\, g}}\,.$$

---

10. Los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{u}}_x$ y $\hat{\boldsymbol{u}}_y$ son tales que apuntan hacia la izquierda y hacia abajo respectivamente.
$$M = m\sqrt{1 + \frac{R^2}{D^2}}\,, \quad w = \sqrt{\frac{g}{D}}\,, \quad \boldsymbol{F} = -mg\sqrt{1 + \frac{R^2}{D^2}}\,(\hat{\boldsymbol{u}}_x + \hat{\boldsymbol{u}}_y)\,.$$

11.

a.
$$a = g\,\mathrm{tg}(\alpha)\,, \quad w = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}(\alpha)}{D + L\,\mathrm{sen}(\alpha)}}\,.$$

b. El hilo no estaría en el plano formado por la varilla y el eje. De acuerdo a las ecuaciones de Newton, al haber aceleración angular tiene que actuar sobre la partícula una fuerza tangente a la circunferencia que dibuja al moverse y en el plano de la misma. Esta fuerza es una componente de la tensión en el hilo perpendicular al plano que contiene a la varilla y al eje.

12.

a. $$w = \sqrt{\frac{g\cos(\beta)}{R}}\,, \qquad \alpha = \frac{g\,\mathrm{sen}(\beta)}{R}\,.$$

b. $$\boldsymbol{v} = \sqrt{Rg\cos(\beta)}\,\left[\cos(\beta)\hat{\boldsymbol{u}}_x - \mathrm{sen}(\beta)\hat{\boldsymbol{u}}_y\right]\,, \qquad \boldsymbol{a} = -g\hat{\boldsymbol{u}}_y\,.$$

13.

b. $$N = Mg\,, \quad a_{\mathrm{tangencial}} = L\alpha\,, \quad a_{\mathrm{radial}} = -Lw^2 = -L\alpha^2 t^2\,,$$
$$F_{\mathrm{roce\ tangencial}} = ML\alpha\,, \quad F_{\mathrm{roce\ radial}} = -ML\alpha^2 t^2\,.$$

c. $$t = \frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{\mu_e g}{L}\right)^2 - \alpha^2\right]^{1/4}\,.$$

14.

a. $$N = [mg\,\mathrm{sen}(\beta) + mr\,w^2\cos(\beta)] \qquad F_{\mathrm{roce}} = |mg\cos(\beta) - mr\,w^2\mathrm{sen}(\beta)|\,,$$
$$\boldsymbol{N} = \{mg\,\mathrm{sen}(\beta) + mr\,w^2\cos(\beta)\}\,(-\cos(\beta)\,\hat{\boldsymbol{u}}_r + \mathrm{sen}(\beta)\,\hat{\boldsymbol{u}}_z)$$
$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{roce}} = \{mg\cos(\beta) - mr\,w^2\mathrm{sen}(\beta)\}\,(+\mathrm{sen}(\beta)\,\hat{\boldsymbol{u}}_r + \cos(\beta)\,\hat{\boldsymbol{u}}_z)\,.$$

b. El rango de valores posibles para la velocidad angular es

$$w_{\mathrm{mínimo}} \equiv \sqrt{\frac{g}{r}\left(\frac{1-\mu_e}{1+\mu_e}\right)} < w < \sqrt{\frac{g}{r}\left(\frac{1+\mu_e}{1-\mu_e}\right)} \equiv w_{\mathrm{máximo}}\,.$$

La fuerza de roce (siempre tangente al cono) se anula para $w_0 = \sqrt{g/r}$, apunta hacia arriba si $w \in (w_{\mathrm{mínimo}}, w_0)$ y apunta hacia abajo si $w \in (w_0, w_{\mathrm{máximo}})$.

10-Respuestas

Trabajo y energía

---

1. $\boxed{W(0,t_1)\ >\ 0}$ $\boxed{W(t_1,t_2)\ =\ 0}$ $\boxed{W(t_2,t_3)\ <\ 0}$ $\boxed{W(t_3,t_4)\ >\ 0}$

2.

a.
$$W_{\text{peso}} = 30\sqrt{3}\ \text{J}\,, \quad W_{\text{normal}} = 0\,, \quad W_{\boldsymbol{S}} = -21\sqrt{3}\ \text{J}\,.$$

b.
$$V_B = 5\ \text{m/s}\,, \quad N = 73\ \text{N}\,.$$

3.

a.
$$v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g R\theta}$$

b.
$$n = \frac{v_0^2}{4\pi\mu g R} = \frac{8}{\pi} \approx 2,5$$

4.

a.
$$v_2 = \sqrt{Rg\,\text{sen}(\theta)}\,, \quad \boldsymbol{v}_2 = \sqrt{Rg\,\text{sen}(\theta)}\,[-\text{sen}(\theta)\boldsymbol{i} + \cos(\theta)\boldsymbol{j}]$$

b.
$$E = mRg\left[1 + \frac{3}{2}\,\text{sen}(\theta)\right]$$

c.
$$h_3 = R\left[1 + \frac{3}{2}\,\text{sen}(\theta) - \frac{1}{2}\,\text{sen}^3(\theta)\right]$$

d.
$$v_1 = \sqrt{Rg[2 + 3\text{sen}(\theta)]}$$

5.

a. $$w = \sqrt{w_0^2 + \frac{2\,g}{R}\,[1 - \cos(\theta)]}\;, \quad N = mg\,[3\cos(\theta) - 2] - mRw_0^2$$

b. $$\cos(\theta) = \frac{2}{3} + \frac{Rw_0^2}{3g}$$

c. $$w_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

6.

a. $$E = \frac{5}{2}\,mgR$$

b. $$h = \frac{5}{2}\,R$$

c. $$\boldsymbol{v}_2 = \sqrt{[3 + 2\cos(\theta)]\,gR}\;[\cos(\theta)\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}(\theta)\boldsymbol{j}]$$

d. $$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\,\mathrm{sen}(\theta)$$

7.

a. $$N = 10\ \mathrm{N}$$

b. $$L = 1\ \mathrm{m}$$

c. $$x_{\text{Máx}} = \frac{3}{10}\,\mathrm{m}$$

8.

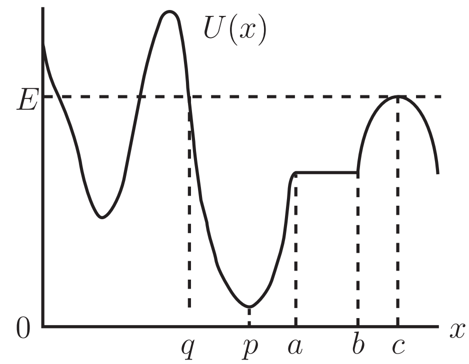
a. $$N = 20\sqrt{3}\ \mathrm{N}\,, \quad F_{\text{roceD}} = 10\ \mathrm{N}$$

b. $$d = 2\ \mathrm{m}\,, \quad d' = \frac{1}{3}\,\mathrm{m}$$

c. $$F_{\text{roceE}} = 80\ \mathrm{N}\ \text{(tangente al plano inclinado apuntando hacia abajo)}\,, \quad \mu_E \geq \frac{4}{\sqrt{3}}$$

---

9. Las flechas entre dos puntos indicarán que el sentido del movimiento es del primer punto al segundo.



a. En el trayecto $b \to a$ la partícula se mueve con velocidad constante. En el $a \to p$ acelera, en $p \to q$ desacelera y se detiene en q. En q la fuerza neta sobre la partícula la hace regresar. En el trayecto $q \to p$ acelera, desacelera en $p \to a$, se mueve con velocidad constante en $a \to b$ y desacelera en el trayecto $b \to c$, quedándose en reposo permanente en el punto c debido a que allí tiene velocidad nula y la fuerza neta es nula (se trata de un punto de equilibrio inestable).

b. Si la energía es ligeramente menor no se detendrá en el punto c sino un poco antes, digamos en $x = c^-$; luego permanecerá oscilando entre $x = c^-$ y un punto $x = q^+$. Si la energía es ligeramente mayor no se detendrá en c y continuará su viaje hacia la derecha del eje x.

10.

a.
$$N = mg\cos(\beta)\,, \quad F_{\mathrm{Roce}} = \mu\, mg\cos(\beta)$$

b.
$$U_b = 2mgR\,\mathrm{sen}(\beta)\,, \quad W_{\mathrm{Roce}} = -\pi R\,\mu\, mg\cos(\beta)$$

c.
$$v_b = \sqrt{v_a^2 - 2gR\,[2\,\mathrm{sen}(\beta) + \pi\mu\cos(\beta)]}$$

11-Respuestas

Oscilaciones

1.

a.
$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{k}{M_1 + M_2}}\, L\, \hat{\boldsymbol{u}}_x$$

b.
$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{M_1}{k}}\,, \quad A = \sqrt{\frac{M_1}{M_1 + M_2}}\, L\,, \quad \delta = -\frac{\pi}{2}\,,$$

$$x = \sqrt{\frac{M_1}{M_1 + M_2}}\, L \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M_1}}\, t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{M_1}{M_1 + M_2}}\, L \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{M_1}}\, t\right)\,,$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{k}{M_1 + M_2}}\, L \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M_1}}\, t\right)\,.$$

2.

a.
$$x(t) = -\sqrt{\frac{2Mgh}{k}}\, \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\, t\right)$$

b.
$$\boldsymbol{r} = -\sqrt{\frac{3Mgh}{2k}}\, \hat{\boldsymbol{x}}\,, \quad \boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{gh}{2}}\, \hat{\boldsymbol{x}}$$

3.

a.
$$\boldsymbol{F} = -[k_1(x - l_1) + k_2(x - l_2)]\boldsymbol{i}\,, \quad x_e = \frac{l_1k_1 + l_2k_2}{k_1 + k_2}\,, \quad k' = k_1 + k_2$$

b.
$$\boldsymbol{F} = -k'(x - x_e)\, \boldsymbol{i} \;\Rightarrow\; k = k' = k_1 + k_2 \;\text{ y }\; l = x_e = \frac{l_1k_1 + l_2k_2}{k_1 + k_2}$$

---

4. Todas las unidades se encuentran en el sistema M.K.S.

a. $$A = 4\,, \quad \tau = 2/5\,, \quad \omega = 5\pi\,, \quad k = 100\pi^2$$

b. $$E = 800\pi^2\,, \quad v_{\text{máx}} = 20\pi$$

c. $$x(t) = 4\cos\left(5\pi\, t + 5\pi/3\right)\,, \quad \dot{x}(t) = -20\pi\,\text{sen}\left(5\pi\, t + 5\pi/3\right)$$

d. $$t = 4/15$$

5.

a. $$\Delta l_1 = x - l_{01}\,, \quad \Delta l_2 = h - x - l_{02}$$
$$\boldsymbol{F} = [-k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2]\boldsymbol{i} = [-k_1(x - l_{01}) + k_2(h - x - l_{02})]\boldsymbol{i}$$

b. $$x_e = \frac{k_1 l_{01} + k_2(h - l_{02})}{k_1 + k_2}$$

c. $$\boldsymbol{F} = -(k_1 + k_2)z\,\boldsymbol{i}\,, \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{z}\,\boldsymbol{i}\,, \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

6.

a. $$a_{\text{Máx}} = \frac{k\,A}{M + m}\,, \quad F_{\text{Roce Máx}} = \frac{k\,A\,m}{M + m}$$

b. $$\frac{k\,A}{(M + m)g} < \mu$$

12-Respuestas

Momentum lineal y colisiones

1.

a.
$$\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{y}} \text{ m/s}$$

b.
$$E_{c,i} = \frac{33}{2}\,\text{J}\,, \quad E_{c,f} = \frac{3}{2}\,\text{J}\,, \quad \text{Porcentaje} = \frac{E_{c,i} - E_{c,f}}{E_{c,i}} \times 100 = 90.9\%$$

2.

a.
$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}(9\,\hat{\boldsymbol{x}} - \sqrt{3}\,\hat{\boldsymbol{y}}) \text{ m/s}\,, \quad \theta = \text{arctg}(\sqrt{3}/9) \approx 10.89^\circ$$

b.
$$\boldsymbol{I}_2 = -(\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sqrt{3}\,\hat{\boldsymbol{y}}) \text{ Ns}\,, \quad \boldsymbol{F}_{\text{promedio}} = -(100\,\hat{\boldsymbol{x}} + 100\sqrt{3}\,\hat{\boldsymbol{y}}) \text{ N}$$

3.

a.
$$v = \sqrt{\frac{m+M}{m^2}\,kx^2}$$

b.
$$\frac{Q}{E_f} = \frac{M}{m}$$

4.

a.
$$v_1 = \sqrt{2gL} = 4 \text{ m/s}$$

b.
$$v_2' = \sqrt{2gh} = 2 \text{ m/s}$$

c.
$$v_1' = 1 \text{ m/s dirigida hacia la izquierda.}$$

d. El choque no es elástico porque durante la colisión cambia la energía cinética. La energía cinética justo antes de la colisión es $E_c = 16$ J y justo después es $E_c' = 11$ J.

---

5. $$\boldsymbol{v}_m = \frac{M}{M+m}\, v\, \hat{\boldsymbol{u}}_x\,, \quad \boldsymbol{v}_M = -\frac{m}{M+m}\, v\, \hat{\boldsymbol{u}}_x$$

6.

a. $$\boldsymbol{v}_{\text{Joven}} = v_0\, \boldsymbol{i} + \frac{m}{M+m}\, v\, \boldsymbol{j}\,, \quad \boldsymbol{v}_{\text{Trineo}} = v_0\, \boldsymbol{i} - \frac{M}{M+m}\, v\, \boldsymbol{j}$$

b. $$E_{c\,o} = \frac{M+m}{2}\, v_0^2 \quad \text{y} \quad E_{c\,f} = \frac{M+m}{2}\, v_0^2 + \frac{M\, m\, v^2}{2(M+m)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_c = \frac{M\, m\, v^2}{2(M+m)} \quad \text{se gana energía cinética}$$

---

7. Llamaremos $\hat{\boldsymbol{u}}_x$ al vector unitario que apunta hacia la izquierda.

a. $$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{a-1}{a+1}\, \sqrt{2gL}\, \hat{\boldsymbol{u}}_x\,, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{2}{a+1}\, \sqrt{2gL}\, \hat{\boldsymbol{u}}_x$$

b. $$h = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 L$$

c.
$$\text{caso } a = 1\ : \quad \boldsymbol{v}_1 = 0\,, \quad \boldsymbol{v}_2 = \sqrt{2gL}\, \hat{\boldsymbol{u}}_x\,, \quad h = 0$$
$$\text{caso } a \gg 1\ : \quad \boldsymbol{v}_1 \approx -\sqrt{2gL}\, \hat{\boldsymbol{u}}_x\,, \quad \boldsymbol{v}_2 \approx 0\,, \quad h \approx L$$

8.

a. No hay fuerzas externas al sistema luego $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{\text{Antes}} = \boldsymbol{P}_{\text{Después}} = mv\, \boldsymbol{i}$.

b. Justo después (JD) del choque M_2 está en reposo, M_1 y m tienen la misma rapidez v_{JD} y como el resorte no está comprimido la energía E_{JD} es sólo cinética. Luego

$$\boldsymbol{v}_{\text{JD}} = \frac{\boldsymbol{P}}{m+M_1} = \frac{mv\, \boldsymbol{i}}{m+M_1}\,, \quad E_{\text{JD}} = \frac{1}{2}(m+M_1)v_{\text{JD}}^2 = \frac{m^2v^2}{2(m+M_1)}$$

c. Cuando el resorte está completamente comprimido los componentes del sistema tienen todos la misma velocidad dada por

$$\boldsymbol{v}_{\text{compr}} = \frac{\boldsymbol{P}}{m+M_1+M_2} = \frac{mv\, \boldsymbol{i}}{m+M_1+M_2}$$

d. $$E_{\text{c,compr}} = \frac{1}{2}(m+M_1+M_2)v_{\text{comp}}^2 = \frac{m^2v^2}{2(m+M_1+M_2)}$$

La energía cinética después de la colisión se conserva $E_{JD} = E_{\mathrm{c,compr}} + kx^2_{\mathrm{Máx}}/2$, luego

$$x_{\mathrm{Máx}} = \sqrt{\frac{M_2 m^2 v^2}{k(m+M_1)(m+M_1+M_2)}}$$

---

9. El pedazo M_2 se encuentra a una altura de 200 m respecto a la playa y a una distancia horizontal del acantilado de 450 m.
